ALGEBRY

CZYLI

NAUKI O RACHUNKACH LITERALNYCH

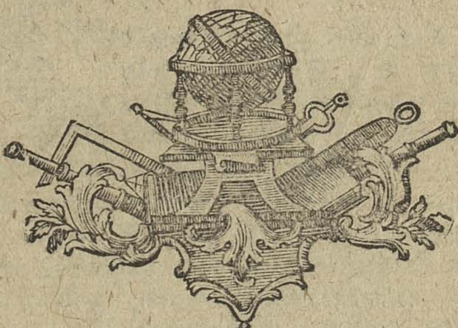
CZĘSC DRUGA.

UŁOŻONA

PRZEZ

X. ANDRZEIA SEBASTYANA USTRZYCKIEGO

Scholarum Piarum.



W WARSZAWIE 1781.

w Drukarni J. K. Mci i Rzeczypospolitey
u XX. *Scholarum Piarum.*

WSTĘP

DO TEY CZĘSCI.

NIe zaraz, iak ſię ziawiła w Europie ALGEBRA, na wyſokim doſkonałoſci ſtopniu ſtanęła. Czaſu trzeba było, żeby umieiętność Arabſka od Europeyczyków dobrze zrozumiana, dopieroż lepiey ułożona, i wydoſkonalona bydź mogła. Wprowadzona od Wiety, chodziła długo manowcami za niewiadomym drogi przewodnikiem swoim, błądziła nie raz i nie w iedném mieyſcu, ani mogła zayść daleko, nie maiąc ieſzcze potrzebnych świateł, któreby ią prowadziły. Nierychło Tomaſz Hariot początkowe iey prawidła przepiſał, mnieyſze litery na mieyſcu większych oſadził, mnożenie ilkości łączeniem liter wyraził, i wyżſze ſtopnie niezgrabnie układać zaczął. Trzeba było poczekać Kartezego, żeby ią okrzeſał, wykſztał-

cił, objaśnił, wyżéy posunął, i przydatniey-szą uczynił. Temu szczęśliwemu dowcipowi Algebra winna wzrost swóy i ulepszenie z osobliwą zdatnością do Geometryi. Przecięż i tak ieszcze daleka była od tey doskonałości, do którey przemysłem i pracą dwóch nieporównanych Mężów w poźnieyszym czasie zbliżona. Newton i Leybnicy dzielą wiekopomną chwałę w nagrodzie za tak pożyteczną pracę. Należałby był pewnie do tego działu i Robert Hook, który znaczną część wieku swego łożył na dochodzeniu rzeczy przyrodzonych, gdyby była śmierć niewczesna osnowy dzieł Jego wraz z życiem nie przerwała. Przedsięwziął był ten dowcipny Anglik ułożenie Algebry Filozoficzney, któraby mogła służyć za instrument do odkrywania prawd Fizycznych w przyrodzeniu zagrzebanych, a kawałki dzieł po nim pozostałych i między dziełami Rycharda Walies dochowanych żałować każą równie Pisarza, iak pism Jego w samym biegu zgasłych. (*) Luboć i ta sama Algebra, którey Filozofia z Matematyką ku wielorakiemu społeczeństwa ludzkiego pożytkowi dziś używa, tak iest wysoka w stopniach swoich, tak obszerna w podziałach swoich, iż piszącemu o niey bardziey o skróceniu dawnych i poźnieyszych wynalazków, niż o przydaniu wcale nowych przemyślać należy, zwłaszcza: gdy kto

(*) *Dictionaire Universel de Mathematique* Tom: I. pag: 18.

kto pisze dla Narodu, który z początkami tey umieiętności nie dobrze ieszcze oswoił się, a który nie smakuie sobie w żadney rzeczy bądź naypożytecznieyszey, skoro suchey i zabawną ciekawością niezaprawney. Dla tych naybardziéy przyczyn Część ta Druga Algebry nie postąpi wyżey nad czwarty stopień w rezolwowaniu składanych Zagadnień, czyli Problematów osobliwie takich, które z wyższego stopnia na niższe obrócić się nie dadzą, opuści rachunki mnieyszey wagi, a działania zbyt długiego i uprzykrzonego, lekko tylko, i nie pierwéy dotknie rachunku ściennego, aż potrzeba przyciśnie, zacznie pierwsze Rozdziały od wykładu wyrazów, żeby się w dalszem przekładaniu zrozumialszą stała, i nie miała potrzeby, tam się ze słów tłumaczyć, gdzie z rzeczy samey przyidzie, a rozwodząc się obszerniey nieco z rachunkiem wykładniczym, zbliży się do zamierzonego celu, którym iest ułatwienie naywiększey w téy Części trudności, to iest: redukcyi pomiarów wyższostopniowych, azatem rezolucyi wszelkiego rodzaju Zagadnień. Pominie atoli szczególne Ziemiomiernicze Zagadnienia, acz do ich rozolwowania naypierwéy i naybardziéy przysposabia; zostawuiąc to działanie Geometryi iako istotnie do iey zamiaru należne, a oszczędzaiąc znacznego kosztu na druk i rznięcie figur nieuchronnie potrzebnego, na który Pisarzów podobnych dzieł zazwyczay nie stać.

ROZ-

ROZDZIAŁ I.

O RACHUNKU WYKŁADNICZYM.

§ I. *Wykład wyrazów, do zrozumienia tey Części potrzebnych.*

RAchunek Wykładniczy, *Calculus Exponentialis*, w Algebrze nazywa ſię ten, który ſię przez wykładników, *Exponentes*, odprawuie. Co zaś ieſt wykładnik, w początkach Pierwſzey Części tey Nauki doſtatecznie wyłożyło ſię. Dokładnieyſze atoli wyłuſzczenie do tey Części należy. Przeto:

I. Wiedzieć trzeba: że ilkość każda, *np:* a ſama przez ſiebie rozmnożona czyni aa, czyli krótſzym ſpoſobem od Kartezego wynalezionym wyrażając: a^2, i nazywa ſię Czworogranem, *quadratum*, czyli drugim ſtopniem, *2da poteſtas*, a wymawia ſię a do drugiego ſtopnia wyniesione, albo krócey: a do 2giego; ſamo zaś a, które przez ſiebie mnożyło ſię, nazywa ſię ścianą, *latus*, pierwiaſtkiem, *radix*, pierwſzym ſtopniem, *prima poteſtas*. Ten ſam znowu czworogran aa albo a^2 będzieli przez ścianę ſwoię to ieſt przez a rozmnożony, wypadnie aaa, czyli a^3, czyli a do 3ciego, to ieſt: ſześciogran, *cubus*, albo 3ci ſtopień, *3tia poteſtas*. Jeżeli znowu ſześciogran ten a^3 rozmnożony będzie przez tęż ścianę a, wyidzie

aaaa

aaaa czyli a^4, czyli a do 4tego, to ieſt: dwuczworogran, *quadrato quadratum*, albo czwarty ſtopień, *quarta poteſtas*. Jeżeli jeſzcze i a^4 rozmnożone zoſtanie przez ſwą ścianę a, będzie aaaaa, czyli a^5 to ieſt: czworogrannoſześciogran, *quadrato-cubus*, albo piąty ſtopień. A ieżeli i ten ieſzcze ſtopień rozmnoży ſię przez a, wypadnie aaaaaa czyli a^6, to ieſt: dwuſześciogran, *cubo-cubus* albo ſtopień ſzóſty, i tak daley wypadać mogą 7my, 8my, 9ty, 10ty i dalſze ieſzcze ſtopnie, a tym ſpoſobem zrobi ſię ſzereg terminów równowzględnych:
a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9. a^{10}. a^{11}. *i t. d.*

Takie tedy liczby ilkościom zwierzchu przypiſane Wykładnikami ſię dlatego nazywaią, iż wykładaią, do którego ſtopnia ilkość ieſt wynieſiona, a razem pokazuią, które mieyſce taż ilkość ma trzymać w liczbie terminów równowzględnych, między któremi równowzględność zachodzi Geometryczna co do liter, bo ilé razy 1. mieści ſię w a, tyle razy a pierwſze mieści ſię w drugiém, drugie w trzeciem *i t. d.* Arytmetyczna zaś co do Wykładników, iako przez ſię oczywiſta.

II. Wykładniki rzeczone nie koniecznie liczbą wyrażaią ſię; mogą ſię wyrażać literą *np:* a^m, a^n, a^r *i t. d.*, a te wykładnikami powſzechnemi albo nieokréślonemi nazywaią ſię, które okréślić, czyli do ſtopnia, którego warunki zagadnienia wyciągają, obrócić można, *np:* ieżeli m = 3, będzie: $a^m = a^3$. *i t. d.*

III. Trafia ſię także: że ilkość za wykładnika nie całkowitą ma liczbę, lecz łomaną, *np:* $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}$, *i t. d*, a ten łomany wykładnik wyraża ścianę tego ſtopnia, który przez mianownika ułomka ieſt oznaczony, i tak $a^{\frac{1}{2}}$ wyraża ścianę 2giego ſtopnia, $a^{\frac{1}{3}}$ wyraża ścianę 3ciego ſtopnia; ſtopnie zaś takie niedoſkonałemi ſię nazywaią, *poteſtates imperfectæ*, i to ſamo znaczą, co $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, które znaki ściennemi czyli radykalnemi nazywaią ſię, *ſigna radicalia*.

IV. Miewaią ieſzcze ilkości przypiſanego ſobie wykładnika z znakiem odciążnym —, *np:* a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Wykładnik ten znaczy iedność podzieloną przez ilkość wyniesioną do ſtopnia tymże ſamym wykładnikiem naznaczonego, i tak a^{-1} iedno ieſt, co $\frac{1}{a}$; a^{-2} iedno ieſt, co $\frac{1}{aa}$; a^{-3} iedno, co $\frac{1}{aaa}$. Gdyby bowiem taka *np:* trafiła ſię frakcya $\frac{aa}{aaaa}$, redukuiąc ią czyli mażąc tak w liczniku, iako w mianowniku aa, zoſtałaby w mnieyſzych terminach frakcya $\frac{1}{aa}$ czyli $\frac{1}{a^2}$, albo ſkracaiąc i ten wyraz a^{-2}, iako ſię mówiło w Części I. o dzieleniu ilkości.

V. Trafia ſię nakoniec: że ilkość zamiaſt wy-

wykładnika ma o, *np*: a^0, z którym równa ſię iedności, co tak okazuię. Gdybym a^2 podzielił przez a^2, wieloraz byłby $= a^0$, gdyż, przez Przepis na Wykładników dany w Części I. na kar: 37, odciągnąwſzy iednego Wykładnika od drugiego równego, nic nie zoſtaie, albo co na iedno wyidzie, o zoſtaie, azatem nowym Wykładnikiem ilkości a, może bydź o. A że a, w a, mieści ſię raz, więc $a^0 = 1$. Wykładnika takiego używanie bywa w Geometryczney proporcyi zaczynaiącey ſię od iedności *np*: w téy; 1,2,4,8, gdzie za liczby zakładaiąc litery, będzie: $a^0 = 1$, $a^1 = 2$, $a^2 = 4$, $a^4 = 8$.

VI. Ponieważ zaś rachunek wykładniczy zamykać w ſobie ma wyciąganie ścian dla wykładników łomanych, czyli ſtopniów niedoſkonałych pod liczbą III. opiſanych, wiedzieć należy: wieloraka ieſt ściana, i iakim ſię znakiem wyraża. Sciana albo 1wſzy ſtopień w porównaniu do ſtopniów wyżſzych może bydź rozmaita, to ieſt: w porównaniu do czworogranu czyli 2giego ſtopnia bywa czworogranna, *radix quadratica*, czyli drugoſtopniowa, taka ieſt ściana a w porównaniu do a^2, w porównaniu zaś do ſześciogranu, czyli 3ciego ſtopnia, ieſt ſreściogranna, *cubica*, czyli trzecioſtopniowa, w porównaniu znowu do 4tego ſtopnia, nazywa ſię czwartoſtopniowa, *i t. d.* Znak ściany ieſt ten $\sqrt{}$, wśrzód którego kładzie ſię liczba ſtopień wyrażaiąca,

to

to ieſt: liczba 2, mali być ściana czworgranna, lubo ta częściey ſię opuſzcza, liczba 3, ieśli będzie ſześciogranna, a ieśli nieokreślona; kładzie ſię m lub n. Jlkość podobnym znakiem uprzedzona nazywa ſię ścienną czyli radykalną, *quantitas radicalis*, a liczba albo litera wśrzód ściennego znaku napiſana nazywa ſię wykładnikiem ściany, *exponens radicis.* np: $\sqrt[3]{ab^2}$ ieſt ilkość radykalna przez wykładnika ſwego 3 wyrażaiąca ścianę ſześciogranną ilkości ab^2.

VII. Nakoniec przypomnieć tu krótko należy, co ſię w 1wſzéy części o dodawaniu, odciąganiu, mnożeniu, i dzieleniu ilkości maiących wykładników mówiło, to ieſt: że ſię takich ilkości wſpółczynniki tylko dodaią, i odciagaią, kiedy ſą ſobie podobne, kiedy zaś niepodobne, dodanie ich i odciągnienie znakami ſię tylko wyraża, tak $a^2 + 3a^2 = 4a^2$. $3a^2 - a^2 = 2a^2$. Lecz $a^2 \times 3b^2 = a^2 \times 3b^2$; $a^2 - 3b^2 = a^2 - 3b^2$. *i t. d.* W mnożeniu zaś ilkości wykładniki dodaią ſię, a w dzieleniu odciągaią, *np:* $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^2\ (a^4) = a^2$ *i t. d.*

§ II. *Jak ilkość poiedyńcza*, monomia, *niższego wykładnika czyli ſtopnia wynosi ſię do wyżſzego danego ſtopnia?*

Jlkość poiedyńcza maiąca ſię wynieść do iakiego ſtopnia, albo ſię z iedney albo z kil-

ku liter ſkłada, i znowu albo ma wſpółczynnika ſwego, albo nie ma.

I. Jeżeli ieſt iedną literą wyrażona bez wyraźnego wſpółczynnika, a z wyraźnym wykładnikiem, łatwo ſię wynieſie do danego ſtopnia, rozmnożywſzy iey wykładnika przez wykładnika danego, produkt będzie ſzukanym ſtopniem, *np:* mam a^2 wynieść do 3 ſtopnia, więc gdy rozmnożę 2 przez 3, mieć będę a^6. Także wynoſząc x^n do nieokreślonego ſtopnia m, będzie = x^{mn}. Wynoſząc zaś x^n do określonego ſtopnia *np:* do 2giego lub 3ciego, będzie x^{2n} lub x^{3n} *i t. d.*

Jeżeli zaś ilkość poiedyńcza, którą wynieść trzeba do danego ſtopnia, wyrażona ieſt dwiema lub więcey literami, wtenczas wykładnika każdey zoſobna litery przez wykładnika danego trzeba rozmnożyć, *np:* ilkość ab do 2giego ſtopnia chcąc wynieść, mnożę domniemanego wykładnika 1 tak ilkości a, iak b przez danego wykładnika 2, będzie a^2b^2. *i t. d.*

Okazanie. *Każdy dany ſtopień ilkości poiedyńczey może ſię wyrazić przez* a^m. *Tego zaś ſtopnia czworogran czyli 2gi ſtopień ieſt* $a^m \times a^m$; *ſześciogran zaś ieſt* $a^m \times a^m \times a^m$ i t. d. *A że* $a^m \times a^m = a^{2m}$, *także* $a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$, *gdyż wykładniki w mnożeniu dodaią ſię (iako ſię dopiero oſtrzegło) więc ieżeli ſię* a^m *do 2giego ſtopnia wynosi, trzeba wykładnika m, rozmnożyć przez 2, ieżeli do 3go, przez 3, i tak wciąż, azatem ogólnie chcąc ilkość wynieść do wyżſzego*

go ſtopnia, doſyć ieſt, wykładnika iey przez danego wykładnika rozmnożyć.

III. Jeżli ilkość poiedyńcza maiąca ſię wynieść do iakiego ſtopnia, ma wſpółczynnika wyraźnego, wſpółczynnik ten do tegoż ſamego ſtopnia powinien być wynieſiony, do którego ſię wynosi ilkość, *np.* ieżeli $2a^m$ wynieść trzeba do 2giego ſtopnia, będzie $2\times 2 = 4a^{2m}$, ieżeli do 3ciego, będzie: $4\times 2. = 8a^{3m}$.

IV. Jeżeli nakoniec ilkość poiedyńcza frakcyą ieſt wyrażona, wynieſie ſię do wyżſzego ſtopnia, mianownika iey y licznika przez nią ſamę mnożąc: *np:* $\frac{a}{2}$ wynoſząc do 2giego ſtopnia, będzie $\frac{a}{2}\times\frac{a}{2} = \frac{aa}{4}$, wynoſząc do 3ciego, będzie $\frac{aa}{4}\times\frac{a}{2} = \frac{aaa}{8}$ *i t. d.*

§ III. *Jak dwukrotną ilkość do danego ſtopnia wynieść?*

Nie tylko dwukrotne, lecz i wſzyſtkie inne ilkości do wyżſzych iakichkolwiek ſtopniów wynoſzą ſię przez mnożenie, iako ſię namieniło i przykładami pokazało w 1wſzéy Części, *na karcie* 27. Mam *np:* wynieść ilkość $a+b$ do 2giego ſtopnia, mnożę $a+b$, przez $a+b$ produkt $a^2+2ab+b^2$ będzie czworogranem. Ten znowu czworogran mnożąc przez iego ścianę $a+b$, wypadnie ſześciogran $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ i tak daley, niżſze ſtopnie przez tęż ſamę ścianę mnożąc, wypadną wyżſze. W czem nie maſz żadney trudności,

gdy

gdy dana ilkość wynosi się do 2giego, lub 3ciego stopnia, ale wynosić ią tym sposobem do wyższych nad 3ci stopniów, nie małaby była praca, i omyłka prędka. Przeto do takiego wynoszenia następuiący sposób bywa używany. I. Niech ta sama ilkość a+—b dana będzie do wyniesienia na 6sty stopień. Wynoszę naprzód 1wszą jey część do 6stego stopnia, będzie przez §. 2. 1wszy termin tego stopnia a^6. Za 2gi piszę toż samo a wyniesione do stopnia zmnieyszonego iednością, i przez 2gą część, to iest przez b rozmnożone, będzie a^5b, czyli a^5b^1. Za trzeci termin położę toż a, wyniesione do stopnia znowu iednością zmnieyszonego, rozmnożywszy go przez b wyniesione do stopnia 2giego, będzie a^4b^2, i tak daley, zmnieyszaiąc zawsze iednością w każdym terminie stopnie 1wszey części ilkości dwukrotnéy, a przeciwnie powiększaiąc 2giey póty, póki nie stanę na terminie, w którymby było a pierwszostópniowe, b zaś sześciostopniowe. Tym sposobem rzeczona ilkość wyniesiona będzie do 6tego stopnia, ale ieszcze bez współczynników, i wyrazi się stopień ten albo tą iedną progressyą Geometryczną : a^6, a^5b^1, a^4b^2. a^3b^3. a^2b^4. a^1b^5. b^6, albo dwiema następuiącemi :

1wszą. a^6. a^5. a^4. a^3. a^2. a^1. 1.
2gą. 1. b^1. b^2. b^3. b^4. b^5. b^6.

II. Zebym zaś współczynników tych sto-

pniow

pniów wynalazł, tak postąpię, *naprzód* wykładnika 1wszego terminu a^6 *kładę* za współczynnika terminu 2giego, będzie $6a^5$. *powtóre*: maiąc współczynnika terminu 2giego 6, mnożę go przez wykładnika 1wszey iego części to iest: przez 5, a produkt dzielę przez 2, (to iest: przez liczbę terminów, których iuż wynalezione są współczynniki) będzie współczynnik 3ciego terminu $15a^4b^2$. Znowu 15 rozmnożywszy przez 4, a produkt podzieliwszy przez 3, znaydę współczynnika 4tego terminu to iest: $20a^3b^3$. *i t. d.* Azatem złączywszy wszystkie te terminy przez znak +—, będzie zupełny z współczynnikami stopień 6sty: a^6+— $6a^5b^1$ +— $15a^4b^2$ +— $20a^3b^3$ +— $15a^2b^4$+— $6a^1b^5$+— b^6.

III. Jeżeli obydwie dwukrótney ilkości części, albo iedna z nich którakolwiek ma swego współczynnika, *np*: ieżeli wynieść trzeba do 3ciego stopnia a+—2b, naprzód wyniosę sposobem przepisanym do 3ciego stopnia a+—b, będzie a^3+— $3a^2b$ +— $3ab^2$+— b^3, potem współczynnika owego 2 położonego przed b, wyniosę do tegoż stopnia, do którego w każdym zosobna terminie ilkość b iest wyniesiona, i tak na 1wszy termin, w którym iest b, będzie ten sam współczynnik to iest 2, na 2gi czworogran iego 4, na 3ci sześciogran 8. Nakoniec rozmnożę te stopnie 2, 4, 8 przez współczynników terminów do 3ciego stopnia wyniesionych to iest: przez 3 i 1, i mieć na-

reście

reście będę : $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. Przyczyna tey roboty i całego ſkładu wyżſzych ſtopniów wyłuſzczona będzie w naſtępuiącym Rozdziale.

IV. Co ſię tycze znaków, te wtenczas tylko powinny być dodatne, kiedy ilkość w pierwſzym ſtopniu w obydwóch terminach była z znakiem $+$, gdy zaś 2ga iey część ieſt odciążna *np*: $a - b$, terminy, w których ściana $-b$ wynieſiona ieſt do ſtopnia nieparzyſtą liczbą 1, 3, 5, wyrażonego, kłaść ſię powinny z znakiem odciążnym, inne zaś wſzyſtkie z dodatnym, tak przerzeczoną dwukrotną ilkość $a - b$ wynioſſzy do 3go ſtopnia, będzie $a^3 - 3a^2b^1, + 3ab^2 - b^3$ dla wykładników nie parzyſtych b^1, b^3.

V. Czaſem Algebryści nie wynoſzą ilkości do danego ſtopnia, lecz znakami tylko okazuią: iż wynieſione bydź maią, znaki zaś ſą te: liniyka ciągniona nad terminami ilkości daney do wynieſienia, i przy końcu liniyki po prawey iey ſtronie przypiſany wyraźnie wykładnik; i tak maiąc $a + b$ wynieść do 2giego ſtopnia, piſzą $\overline{a + b}^{2}$, maiąc wynieść do 3ciego, piſzą $\overline{a + b}^{3}$, maiąc wynieść do ſtopnia nieokreślonego, piſzą $\overline{a + b}^{m}$. Jdzie ztąd: iż chcąc takie ilkości do wyżſzego ieſzcze wynieść ſtopnia, dosyć ieſt, 1wſzego ich wykładnika przez wyżſzego rozmnożyć *np*:

$a + b$.

$\overline{a+b}^{2\times 3} = \overline{a+b}^{6}$, chcąc ie zaś mnożyć, dosyć iest dodać ich wykładników, a chcąc dzielić, dosyć iest odciągnąć tychże wykładników, będzie więc: $\overline{a+b}^{2} \times \overline{a+b}^{3} = \overline{a+b}^{5}$, $\overline{a+b}^{2}\ \overline{(a+b)}^{5} = \overline{a+b}^{3}$.

§ IV. *Jak ułożyć ogólne prawidło do wynoszenia ilkości wszelkich na wyższe stopnie?*

I. Wziąwszy dwukrotną iaką ilkość *np:* $p+q$, wynieść ią trzeba do nieokreslonego stopnia, dwie progressye Geometryczne pisząc sposobem następującym:

$$p^{m}.\ p^{m-1}.\ p^{m-2}.\ p^{m-3}.\ p^{m-4}.\ \textit{i t. d.}$$
$$1.\ q^{1}.\ q^{2}.\ q^{3}.\ q^{4}.\ \textit{i t. d.}$$

Gdzie uważać potrzeba wykładników liczbami wyrażonych, które w terminach pierwszey progressyi dlatego są odciążne czyli z znakiem —, że się tu tak iednością zmnieyszaią, iak w zgiéy iednością zwiększaią.

II. Rozmnożyć terminy poiedyńczo od lewey ręki brane progressyi pierwszéy przez terminy drugiey, czyli połączyć iedne z drugiemi, a przed tak złączonemi znak + położyć, wypadnie: $p^{m} + p^{m-1}q + p^{m-2}q^{2} + p^{m-3}q^{3} + p^{m-4}q^{4}$. *i t. d.*

III. Ponieważ tu współczynników ieszcze braku-

brakuie, żeby ich wynaleść, drugie dwie progressye z samych wykładników zrobić trzeba, będzie:

1*wsza* : m. m—1. m—2. m—3. m—4.

2*ga* : 1. 2. 3. 4. 5.

A te obrócić na frakcye, pierwszéy terminy za liczników, a drugiéy za mianowników kładąc, będzie: $\frac{m}{1}$. $\frac{m-1}{2}$. $\frac{m-3}{4}$. $\frac{m-4}{5}$.

Z tych frakcyi 1wsza $\frac{m}{1}$ czyli m kładzie się za współczynnika 2giego terminu w ogólném prawidle; potém toż samo m przez 2gą frakcyą $\frac{m-1}{2}$ rozmnożone położy się za współczynnika 3ciego terminu, i będzie: $m \times \frac{m-1}{2}$; tenże sam współczynnik znowu rozmnożony przez następuiącą frakcyą będzie współczynnikiem 4tego terminu *i t. d*; a tak zupełnie wyrobione prawidło będzie: $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4}q^4$.

Obaczmy już użycie tego prawidła w wynoszeniu do wyższych stopniów ilkości naprzód dwukrotnéy, a potém wielokrotnéy, ale ostrzegam zawczasu: że w tém działaniu równie iako i w innych podobnych całą naukę o frakcyach Arytmetycznych przytomną w pamięci mieć potrzeba.

I. Maiąc *np*: wynieść do 3ciego stopnia ilkość dwukrotną $2ax + b^2$, będzie $p = 2ax$,

$q = b^2$, ſtopień $m = 3$. Biorę prawidło i zakładam w niem za litery p, q, m, ich ceny to ieſt $2ax$ za p, $+b^2$ za q, 3 za m. Będzie *naprzód* : $p^m = 8a^3x^3$; gdyż p^m pokazuie : że w cenie iego $2ax$ ilkośći a, x, równie iako ich wſpółczynnik 2 powinny być wynieſione do 3go ſtopnia, bo $m = 3$, będzie zatem $2\times 2 = 4\times 2 = 8a^3x^3$.

Powtóre : $mp^{m-1}q = 12a^2b^2x^2$, bo ponieważ $m = 3$, toć mp^{m-1} znaczy : że $2ax$ ma być wynieſione do ſtopnia $3-1$ to ieſt do 2giego, do tego więc ſtopnia ax i wſpółczynnika 2 wynioſſzy, a $4a^2x^2$ przez 3 rozmnożywſzy, gdyż $m = 3$ przed p z mnożenia wypadło, będzie $12a^2x^2$; nakoniec rozmnożywſzy przez $q = b^2$, będzie : $12a^2b^2x^2$.

Potrzecie : $m\times\frac{m-1}{2}p^{m-2}q^2 = 6ab^4x$, ponieważ bowiem $m = 3$, toć p^{m-2} znaczy : że ilkość $2ax$ powinna w 1wſzym ſtopniu zoſtać, bo $3-2 = 1$, q^2 zaś $= b^2$ wynieść ſię powinno do 2giego ſtopnia, azatem będzie: $2axb^4$, przydawſzy zaś wſpółczynnika, będzie $3\times\frac{3-1}{2} = 3$, a całą tę ilkość rozmnożywſzy przez 2 położone przed ax, będzie $6ab^4x$. *Naoſtatek*: $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}p^{m-3}q^3 = b^6$, gdyż zakładaiąc za m 3, będzie $3\times\frac{3-1}{2} = 3\times\frac{2}{2} = 3\times 1 = 3$, tożſamo znowu 3 rozmnożone przez $\frac{3-2}{3} = 3\times\frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$, które ſię opuſzcza, potém $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$ przez Wykł: V, więc zoſtanie tylko $q^3 = b^6$, bo b^2 wynieſione do 3ciego ſtopnia przez § II. $= b^6$

$=b^6$, przed którém 1 także ſię opuſzcza, azatem ilkości dwukrotnéy $2ax + b^2$ 3ci ſtopień będzie: $8a^3x^3 + 12a^2b^2x^2 + 6ab^4x + b^6$.

II. Niech będzie trzykrotna ilkość $a + b - c$ maiąca być wynieſioną do 4tego ſtopnia, będzie $a = p$, $b - c = q$, ſtopień $4 = m$, azatem będzie *naprzód*: $p^m = a^4$, *powtóre*: $mp^{m-1}q$, ponieważ $m = 4$, $= 4a^{4-1} = 4a^3$; q zaś założone za $b - c$ powinno ſię rozmnożyć przez $4a^3$, będzie zatem przez przepiſy dane na mnożenie w 1 części $= 4a^3b - 4a^3c$, *potrzecie*: $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 = 4 \times \frac{4-1}{2} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6a^2$; q^2 zaś będąc wynieſione do 2go ſtopnia znaczy: że $b - c$ powinno ſię wynieść do tegoż ſtopnia, będzie zatém (przez § III.) $b^2 - 2bc + c^2$, a że ieſt złączone z p^{m-2}, ma ſię rozmnożyć przez $6a^2$, a tak będzie $6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2$, *poczwarte*: $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = 4 \times \frac{4-1}{2} = 6 \times \frac{4-2}{3} = \frac{6}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4a^{4-3} = 4a$, q^3 zaś wyraża: że $b - c$ wynieść trzeba do 3go ſtopnia, będzie więc przez § III. $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$, a ten ſtopień rozmnożywſzy przez $4a$, wyidzie produkt: $4ab^3 - 12ab^2c + 12abc^2 - 4ac^3$; *popiąte*: $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4}q^4 = a^{4-4}q^4 = a^0q^4$; a^0 zaś $= 1$ przez wykład V. więc zamiaſt q^4 tylko kładzie ſię $b - c$ wynieſione do 4tego ſtopnia,, azatem przez § III. będzie: $b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$. Doſkonały tedy ilkości trzykrotnéy $a + b - c$ ſtopień 4ty ieſt: $a^4 + 4a^3b - 4a^3c$

$+ 6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 - 12ab^2c + 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$.

III. Podobnym ſpoſobem czterokrotne i inne wielokrotne ilkości wynosić ſię mogą, gdyby zaſzła potrzeba wynoſzenia onych do wyżſzych ſtopniów, p zakładaiąc za 1wſze dwa terminy, q zaś za drugie dwa, ale o tem więcéy niż doſyć. Kto już zechce doświadczyć: czy dobrze ilkość iaką wyniółł do danego ſtopnia, niech z niego tęż ſamę ilkość to ieſt: ścianę wyciągnie, o czem w naſtępującym Rozdziale, a jeżeli wyciągniona ściana będzie ilkością, która ſię do wyżſzego ſtopnia wynoſiła, znak będzie niemylnego iey wynieſienia.

ROZDZIAŁ II.

O wyciąganiu ścian, a naprzód o ſkładzie i rozbiorze wyżſzych ſtopniów Algebraicznych.

WYciągać ścianę z danego ſtopnia, nic innego nie ieſt; tylko wynaleść pierwſzą ilkość, która ſama przez ſiebie raz lub kilka razy rozmnożona ſtopień dany wyrobiła, *np*: wyciągnąć ścianę czworogranną czyli drugoſtopniową z ſtopnia a^2, ieſt to wynaleść ilkość a, która raz ſama przez ſiebie rozmnożona uczyniła tenże czworogran a^2. Przeto czworogr彼any, ſześciograny i inſze wyżſze ſtopnie

ſtopnie iako z mnożenia powſtaią, tak przez dzielenie do ſwoich ſię początków czyli ścian wracaią.

§ V. *Jak wyciągnąć ścianę z danego ſtopnia ilkości pojedyńczey*, quantitatis monomiæ.

Podzielić trzeba wykładnika danego ſtopnia przez wykładnika daney ściany, wieloraz będzie wykładnikiem ſzukanéy ściany *np*: jeżeli z a^6 wyciągać ſię ma ściana czworogranna, ponieważ wykładnik tey ściany ieſt 2, więc podzieliwſzy 6 przez 2, wieloraz 3 będzie wykładnikiem ściany zapytaney, czyli ściana tego ſtopnia będzie a^3. Tym ſamym ſpoſobem wyciągnie ſię i ſześciogranna ściana z danego ſtopnia a^6, dzieląc 6 przez 3, a wieloraz piſząc za nowego wykładnika, będzie zatem: $a^{\frac{6}{5}}=a^2$. Samo nawet a^2, podzieliwſzy 2 przez 2, będzie $= a^1$ czyli a. Podobnie w ſtopniach różnemi literami i wykładnikami wyrażonych *np*: w tym a^6b^3 znaydzie ſię ściana ſześciogranna, dzieląc wykładników 6 i 3 przez 3, będzie $a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{3}{3}} = a^2b$. Albowiem iako dana pojedyńcza ściana wynosi ſię do danego ſtopnia, mnożąc jey wykładnika przez wykładnika ſtopnia danego, tak przeciwnie wyciąga ſię taż ściana z danego ſtopnia, wykładnika jego dzieląc przez wykładnika ściany daney. Jakoż tym ſpoſobem wyciągniona ściana, gdyby ſię ſama przez ſiebie znowu rozmno-

mnożyła tak, iak ſię w 1wſzym Rozdziale działało, wróciłby ſię tenże, co pierwéy był ſtopień *np:* $a^3 \times^2 = a^6$.

§ VI. *Gdy dany ſtopień jeſt w wielu terminach czyli w ilkośći wielokrotney, iak z niego wyciągnąć śćianę czworogranną?*

Zeby temu zapytaniu zadoſyć uczynić, trzeba znać ſkład danego ſtopnia i na części go rozebrać, czyli trzeba krótko przełożyć: z jakich ſię ſkłada części czworogran dwukrotney ściany, *quadratum radicis binomiæ*, a z jakich czworogran ściany wielokrótney, *polinomiæ*. Co do 1wſzego, czworogran ściany dwukrotnéy ſkłada ſię *naprzód*: z czworogranu 1wſzego terminu ściany ſwoiéy, *powtóre*: z dwóyki, *duplo*, tegoż 1wſzégo terminu rozmnożonéy przez termin 2gi, *potrzecie*: z czworogranu 2giego terminu teyże ściany. Co tak krótko okazuię: każda ściana dwukrotna może ſię wyrazić przez $a + b$, albo przez $a - b$, azatem ściany te wyniósſzy do 2giego ſtopnia czyli porobiwſzy z nich czworograny przez § III, każdy czworogran ściany dwukrotnéy wyrazić ſię może przez $a^2 + 2ab + b^2$, albo przez $a - 2ab + b^2$, które czworograny ſłużyć mogą za formuły czyli wzory wſzelkich innych. A że oczywiſta: iż obydwa te czworograny co do znaków tylko różne ſkładaią ſię *naprzód*: z czworogranu 1wſzego terminu ściany ſwoiéy to

ieſt:

iest : z a^2, *powtóre* : z dwóyki tegoż terminu 1wszego rozmnożonéy przez 2gi to iest: z + albo — 2ab, *nakoniec* : z czworogranu terminu 2giego to iest z +—b^2; więc wszelki czworgran ściany dwukrotnéy ten a nie inny skład w sobie zawiera. Co się tycze ściany czworogrannéy trzykrotnéy, czterokrotnéy *i t. d*, z tych każda uważać się może iako dwukrotna, biorąc po kilka iéy terminów za ieden, azatem każdego czworogranu maiącego ścianę wielokrotną części wyrazić się mogą 1wszą lub 2gą przerzeczoną formułą, które maiąc przed oczyma w ciągnieniu ściany zapytaney, nastepuiących trzymać się potrzeba przepisów.

Przepis 1. Litery wyrażaiące czworogran, z którego się ściana czworogranna wyciąga, układać tym porządkiem : żeby na 1wszém mieyscu była ta litera, która naywiększego ma wykładnika, na drugiém zaś ta, która ma mnieyszego jednością, na trzeciém, która ma ieszcze mnieyszego albo żadnego nie ma, tożcały ten czworogran określić temi znakami |: :| albo też temi (: :) Dopiéro maiąc w pamięci, że czworogran ściany dwukrotnéy składa się z czworogranu 1wszego terminu ściany *i t. d.* czyli maiąc przed oczyma formułę: a^2 ✢ 2ab ✢ b^2, działać podług dalszych przepisów.

Przepis 2. Ponieważ w 1wszym terminie danego i porządnie ułożonego czworogranu zawiera się czworogran 1wszego terminu ściany

wy-

wyrażony w formule przez a^2; więc wyciągnąć z niego ścianę czworogranną sposobem w § V. opisanym, i położyć ją za 1wszy termin ścienny po prawéy stronie. Potém czworogran jego odciągnąć od danego stopnia, a resztę terminów zachować do dalszego działania.

Przepis 3. W téy reście zawiera się ieszcze dwóyka 1wszego terminu ściennego przez 2gi rozmnożona wyrażona przez 2ab, i czworogran terminu 2go wyrażony przez b^2, więc przez dwóykę rzeczoną podzielić termin 1wszy pozostałéy reszty, a wieloraz napisać za 2gi termin ścienny, toż rozmnożyć go tak przez niego samego, iako przez dwóykę rzeczoną, a produkt odciągnąć od wzmiankowanéy reszty; ieśli po tém odciągnieniu nic nie zostanie, znak będzie: że dany stopień doskonałym był czworogranem ściany dwukrotnéy, która już wyciągniona. Jest *np*: czworogran dany ($n^2 + 4n + 4$) którego terminy przez *Przepis* 1. tak są ułożone: że ten na 1wszém iest mieyscu, który naywyższego ma wykładnika to iest n^2; przez *Przep*: 2. z 1wszego terminu danego czworgranu n^2 wyciągniona ściana n iest 1wszym terminem ściany dwukrotnéy, a tego czworogran odciągniony od n^2 zostawuie resztę: $4n + 4$; przez *Przep*: 3. téy reszty termin 1wszy 4n podzieliwszy przez dwóykę terminu ściennego znalezionego n to iest przez 2n, wieloraz + 2 wypadnie za 2gi termin ściany czworogrannéy, który roz-

mnożywszy tak przez niego samego, iako przez dwóykę 1wszego terminu ściany, to iest przez 2n, da produkt: ✠ 4n ✠ n, a ten odciągnąwszy od reszty danego czworgranu, nic zostanie, co znakiem będzie: że dany stopień iest doskonałym czworogranem ściany dwukrotnéy n ✠ 2. Wszakże gdybym wyniósł tę ścianę do 2go stopnia, wróciłby się nieochybnie dany czworogran.

Przepis 4. Gdyby zaś po wyciągnieniu 2go terminu ściany pozostała ieszcze iaka reszta z danego stopnia; dowodembyto było: iż ściana, która się wyciąga, ma się ieszcze składać z 3go terminu, trzeba go więc wyciągać następuiącym sposobem: dwa 1wsze terminy ścienne już znalezione wziąwszy za ieden, niewiadomy zaś, którego szukam, za 2gi, tak postąpię; iakobym dotąd czworogran tylko terminu 1wszego od danego stopnia odciągnął, azatém iakoby w reście tegoż stopnia zawierała się ieszcze dwóyka 1wszego terminu ściennego rozmnożóna przez 2gi, (biorąc za 1wszy termin summę dwóch znalezionych, a za 2gi biorąc 3ci ieszcze niewiadomy) i czworogran terminu 2go. Przeto znowu podług *Przep*: 3go działam, to iest: przez dwóykę terminu 1wszego już znalezionego dzielę jeden który z terminów w reście pozostałych, a wieloraz piszę za nowy termin ścienny, potém wieloraz ten mnożę tak przez niego samego iako i przez dwóykę ter-

minu

minu 1wſzego ściennego, a produkt odciągam od rzeczonéy reſzty. Niech będzie *np*:

Stopień dany: *Sciana Czworogr*:

$(a^2 - 2a + 4ab + 4b^2 - b + 1)$ $a - 1 + 2b$.

Przez *Przepis* 1. terminy porządnie ułożywſzy; przez 2. wyciągam ścianę a z 1wſzego terminu a^2 i piſzę ią za pierwſzy termin ściany czworogrannéy, a czworogran jego a^2 odciągam od danego ſtopnia to ieſt od a^2, zoſtaie reſzta $= -2a + 4ab + 4b^2 - 4b + 1$; przez *Przep*: 3. reſzty téy 1wſzy termin $-2a$ dzielę przez dwóykę 1wſzego terminu znalezionego to ieſt: przez $2a$, wieloraz -1 piſzę za 2gi termin ścienny, a ten rozmnożywſzy przez niego ſamego i przez dwóykę 1wſzego terminu to ieſt przez $2a$, produkt $-2a + 1$, odciągam od reſzty wyżéy pozoſtałéy, po którém odciągnieniu zoſtaie ieſzcze reſzta $= +4ab + 4b^2 - 4b$; przez *Przep*: 4. dwa terminy ściany wyciągnionéy $a - 1$ za ieden wziąwſzy i podwóiwſzy, przez dwóykę ich to ieſt przez $2a - 2$ dzielę pozoſtałą reſztę to ieſt uważam: ile razy 1wſzy dzielnika termin $2a$ mieści ſię w 1wſzym terminie reſzty $+4ab$, a wieloraz $+2b$ piſzę za nowy termin ścienny, który przez ſiebie ſamego i przez dwóykę dwóch 1wſzych terminów ściennych rozmnożony da produkt $4ab - 4b + 4b^2$ równy reście, od któréy odciągniony, reſzty nic zoſtawi; azatém dany ſtopień ieſt doſkonałym

czwo-

czworogranem, a ściana jego czworogranną iest a—1+2b.

Przepis 5. Gdyby zaś i po trzeciém ieſzcze odciągnieniu miała zoſtać iaka reſzta z czworogranu danego, znakiembyto było: iż w nim ukryty ieſt 4ty ieſzcze termin ściany czworogrannéy, azatém trzy terminy iéy brać trzeba za ieden, a 4ty za 2gi i daléy tak działać, iak pierwéy, a gdyby i po tém ieſzcze działaniu zoſtała reſzta, 4 terminy brać trzeba za ieden i podług Przepiſów poprzedzaiących działać póty, póki reſzt owych ſtanie.

Przepis 6. Gdyby dany czworogran wyrażony był ułomkiem czyli frakcyą; ściana iego oſobno z licznika, a oſobno z mianownika wyciągać ſię powinna, zachowuiąc Przepiſy dopiéro dane.

Przeſtroga 1. Niezawodność ſpoſobów do wyciągnienia tey ściany użytych z ſamego wewnętrznego ſkadu czworogranów wypływa, iako każdy jaśnie to widzieć może, porównywając rzeczony ſkład z działaniem poprzedzaiącém. Doświadczenie zaś, czy dobrze wyciągniona ściana czworogranna, niezawodne będzie; ieśli ściana ta znowu do 2go ſtopnia wynieſiona zgodzi ſię we wſzyſtkiém z czworogranem danym.

Przeſtroga 2. Jeżli z danego czworogranu nie można wyciągnąć ściany, niemożność ta wyraża ſię przez znak ścienny $\sqrt{}$ i przez liniykę wyżéy tego ſtopnia ciągnioną tym ſpoſobem:

ſobem : $\sqrt{a + b}$. Zkąd wziął ſwóy początek Rachunek ścienny, *Calculus radicalis*, długi i nudny, a mało przydatny. Ponieważ bez niego można ciągnąć ścianę z czworogranu niedoſkonałego przez przybliżanie ſpoſobem Algebraicznym niżey pod § IX. opiſanym, albo obróciwſzy litery na liczby ſpoſobem Arytmetycznym, o którym w Rozdziale III. Aleć i o tym rachunku będzie choć krótka nauka w przedoſtatnim Rozdziale téy części.

§ VII. *Rozbiór ſześciogranów i ścian z nich wyciąganie.*

I. Chcąc iak na dłoni widzieć ſkład ſześciogranów, weźmy przed oczy ścianę *np*: $a + b$, i wynieśmy ją do 3go ſtopnia. Wynieſiona przez § III. będzie $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Stopień ten czyli ſześciogran zrobiony z ściany dwukrotnéy z czego ſię ſkłada, widoczna. Składa ſię *naprzód*: z ſześciogranu 1wſzego terminu ściany ſwoiéy to ieſt z a^3; *powtóre*: z tróyki czworogranu, *triplô quadrati*, terminu 1wſzego téyże ściany rozmnożonego przez 2gi to ieſt z $+ 3a^2b$, *potrzecie*: z tróyki terminu 1wſzego rozmnożonego przez czworogran terminu 2go to ieſt z $+ 3ab^2$, *poczwarte*: z ſześciogranu terminu 2go to ieſt: z $+ b^3$. To maiąc przed oczyma, a do wyciągania ściany ſześciogrannéy przyſtępuiąc, uważać i zachować potrzeba naſtępuiące Przepiſy.

Prze-

Przepis 1. Tenże sam i tu służy, który dany iest w § VI. o porządném ilkości ułożeniu, które na tém zależy: żeby ilkość z naywiększym wykładnikiem na 1wszém mieyscu po lewéy stronie była, z mnieyszym na 2giém *i t. d.*

Przepis 2. Z samego weyrzenia na formułę sześciogranną: $a + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ poznać można: że danego 3go stopnia termin 1wszy a^3 zawiera w sobie sześciogran 1wszego terminu ściennego, więc ścianę sześciogranną wyciągnąć z niego potrzeba przez § V. ta będzie 1wszym ściany sześciogrannéy terminem $= a$, toż sześciogran jego odciągnąć od danego stopnia, a resztę do dalszego działania zachować.

Przepis 3. W téy reście zamykać się będzie tróyka czworogranu terminu 1wszego dopiéro znalezionego rozmnożona przez termin 2gi ścienny wyrażona w formule przez $3a^2b$, zaczém zrobiwszy z terminu 1wszego znalezionego czworogran i potroiwszy go, czyli przez 3 rozmnożywszy, a przez produkt podzieliwszy 1wszy termin reszty, wieloraz $\frac{3aab}{3aa}$ będzie 2gim terminem $= b$. Ten maiąc, trzeba *naprzód*: rozmnożyć przez niego troisty czworogran terminu 1wszego wyrażony przez $3a^2$, będzie $+ 3a^2b$; *powtóre*: tróykę terminu 1wszego wyrażoną przez 3a rozmnożyć przez czworogran 2go wyrażony przez b^2, będzie $+ 3ab^2$; *potrzecie*: wynieść tenże 2gi termin b do 3go stopnia, będzie $+ b^3$, a te 3

produ-

produkta odciągnąć od reſzty z danego ſtopnia po 1wſzém odciągnieniu pozoſtałéy (podług nauki *na kar:* 21, *Części I.*) tak dopiéro cały ſześciogran ściany dwukrotnéy dotąd ſzukanéy odciągniony będzie od danego ſtopnia. Przeto ieżeli z niego po tém odciągnieniu nic nie zoſtanie, znak będzie: że ſtopień ten ieſt doſkonałym ſześciogranem ściany dwukrotnéy. Obaczmy to działanie w przykładzie. Niech będzie *np:*

Stopień dany.	*Sciana.*
$8x^6 - 12x^4n + 6x^2n^2 - n^3$	$2x^2 - n$
$-8x^6 + 12x^4n - 6x^2n^2 + n^3$	
o o o o	

Podług *Przep:* 1. terminy ſą ułożóne, podług *Przep:* 2. z 1wſzego terminu danego ſtopnia $8x^6$ wyciągnąwſzy ścianę ſześciogranną, znalazł ſię termin 1wſzy ścienny $= 2x^2$, którego ſześciogran $8x^6$ odciągniony od danego ſtopnia zoſtawił reſztę: $-12x^4n + 6x^2n^2 - n^3$, podług *Przep:* 3. reſzty téy termin 1wſzy $-12x^4n$ podzielony przez troiſty czworogran 1wſzego terminu ściennego to ieſt: przez $12x^4$, dał 2gi termin ścienny $-n$, który rozmnożywſzy przez tenże czworogran, żeby było $-12x^4n$, potém troiſty czworogran terminu 2go to ieſt $3n^2$, rozmnożywſzy przez termin 1wſzy $2x^2$, żeby było $+ 6x^2n^2$, nareście termin 2gi to ieſt $-n$ wyniósſzy do 3ciego ſtopnia, żeby było $- n^3$, a to wſzyſtko odciągną-

gnąwſzy od reſzty danego ſtopnia, podług reguł ſubtrakcyi, nic nie zoſtało, azatém ſtopień dany musi być doſkonałym ſześciogranem ściany dwukrotnéy $2x^2$—n.

Przep: 4. Gdyby zaś po tém drugiém odciągnieniu jeſzcze iaka reſzta zbywała, znakbyto był: że ściana tego ſtopnia ſkłada ſię ze trzech terminów. Więc dwa 1wſze znalezione za ieden wziąwſzy, ten zaś, który ieſzcze nie ieſt odkryty, za 2gi; tak poſtąpić, iakoby w ciągnieniu ściany dotąd nic ſię więcéy nie uczyniło, tylko ſześciogran 1wſzego terminu ściennego odciągnął od danego ſtopnia, w którego reście zawierać ſię ma nadto troiſty czworogran terminu 1wſzego (biorąc dwa wynalezione za ieden, a za drugi ten, który ieſzcze niewiadomy) rozmnożony przez 2gi, potém troiſty czworogran terminu 2giego ieſzcze nieodkrytego rozmnożony przez termin 1wſzy podwóyny, nareſcie ſześciogran 2go terminu. Dlatego przez 3. *Przepis* trzeba z terminu 1wſzego to ieſt z ſummy dwóch znalezionych zrobić czworogran, a przez ten trzykroć wzięty podzielić naſtępuiący termin pozoſtałey reſzty, wieloraz piſząc za nowy termin ścienny. To ſkończywſzy trzeba znowu troiſty czworogran terminu 1wſzego ściennego podwóynego rozmnożyć przez termin 2gi dopiéro znaleziony, i przeciwnie troiſty czworogran terminu 2giego rozmnożyć przez termin 1wſzy, nakoniec tenże termin 2gi wynieść

nieść do 3go ſtopnia, a to wſzyſtko od reſzty po 2giém odciągnieniu pozoſtałéy odciągnąć, nie zoſtanieli reſzta, ściana będzie zupełnie wyciągniona.

Przepis 5. Jeżeli zaś i po tém ieſzcze odciągnieniu zoſtanie iaka reſzta z danego ſtopnia, znak będzie: iż 4ty termin ścienny w nim ſię zamyka, przeto ściana z czterech terminów ſkładać ſię maiąca powinna być obrócona do 2 terminów tak, żeby za 1wſzy wzięte były trzy znalezione, a 4ty za 2gi, i działanie wyżéy przepiſanym ſpoſobem było kończone *i t. d.*

Przepis 6. Jeżeli nakoniec dany ſtopień będzie łomaną liczbą wyrażony, podług tych ſamych Przepiſów wyciągać ſię ma ściana ſześciogranna tak z licznika, iako z mianownika.

II. Naſtępuiący ſpoſób wyciągania ścian ſześciogrannych krótſzy ieſt poniekąd od 1wſzego, ale na Przepiſach iego zaſadzony, i bez zrozumienia tamtych ledwie zrozumiały, który da ſię widzieć w naſtępuiących przykładach.

C. A. B.

$3a^2.\ |a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.|\ a - b.$

$-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^2.$

o o o o

Dany ieſt ſześciogran A, z którego wyciągnąć potrzeba ścianę ſześciogranną B, i wſzym iey terminem wyciągnionym z a^3 ieſt a położone

żone pod B, troiſty iego czworogran $3a^2$ położony pod C ieſt dzielnikiem 2go terminu pod A położonego to ieſt $-3a^2b$. Ztąd wieloraz wypadły $-b$ ieſt 2gim terminem ściany położonéy pod B. Sześciogran z tych dwóch terminów $a-b$ zrobiony i od całego ſtopnia pod A położonego odciągniony kończy działanie. Sciana więc $= a-b$.

$$\begin{array}{llll} \text{H.} & \text{F.} & & \text{G.} \\ 12a^2 & | \; 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27 & | & 2a - 3 \\ & -8a^3 + 36a2 - 54a + 27. & & \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & & \end{array}$$

Z danego ſześciogranu F wyciągaiąc ścianę G, naprzód wyciąga ſię ściana ſześciogranna z $8a^3$, która ieſt $= 2a$ położona pod G, przez któréy troiſty czworogran położony pod H, to ieſt przez $12a^2$ dzieli ſię 2gi termin danego ſtopnia F, to ieſt $-36a^2$, a wieloraz -3 wypada za 2gi termin ściany G, toż z obydwóch tych ściennych terminów zrobiony ſześciogran odciąga ſię od terminów ſtopnia F, po którém odciągnieniu gdy nic nie zoſtaie, znać: że ściana ſześciogranna danego ſtopnia ieſt $= 2a-3$.

Przeſtroga. Spoſoby te wyciągania ścian ſześciogrannych z wnętrznego, iako każdy widzi, ſześciogranów ſkładu wypływają, azatém niezawodne być muſzą. Jeżeli iednak chce kto doświadczyć: czy dobrze wyciągnął ścianę, niech zrobi z niey ſześciogran, a ten, będzieli

danemu równy, upewni o rzetelności ściany wyciągnionéy. Jeżeli zaś z danego ſtopnia ściana ſześciogranna nie może ſię wyciągnąć, tedy przez znak ścienny i liniykę wierzchem ciągnioną wyraża ſię tak: $\sqrt[3]{a-b}$, albo tak: $\overline{a-b}^{3}$.

§ VIII. *Ogólne prawidło ſłużące do wyciągania ścian z danych jakichkolwiek ſtopniów.*

To ſamo prawidło, które w § IV. opiſane ieſt, może być i tu wygodnie użyte z temi jednak warunkami, *naprzód*: żeby ilkość, z któréy ma ſię wyciągać ściana, uważać niby daną do wynieſienia na tén ſtopień, którego ſię ściana ſzuka. *Powtóre*: żeby brać na ścianę czworogranną wykładnika łomanego, czyli wykładnika niedoſkonałego czworogranu $\frac{1}{2}$, na ſześciogranną $\frac{1}{3}$, na ścianę czwartoſtopniową $\frac{1}{4}$ *i t. d.* przez Wykład III. § 1wſzy; dopiéro przyſtąpić do ciągnienia ściany za pomocą prawidła ſpoſobem, który okażą naſtępuiące przykłądy:

I. Niech będzie dany ſtopień: $a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2$, z którego wyciągnąć potrzeba ścianę czworogranną. Z ogólnego prawidła: $p^m+mp^{m-1}q+m\times\frac{m-1}{2}p^{m-2}q^2$ *i t. d.* doſyć będzie wziąć trzy 1wſze terminy (inne bowiem nie ſą zdatne, gdyż ściany z nich wyciągnione byłyby niedoſkona-

ſe) i założyć p za a^2, q za $2ab - 2ac$; a że tu idzie o ścianę czworogranną, więc wykładnikiem iey będzie $\frac{1}{2} = m$. Obracaiąc iuż terminy prawidła na litery za nie dopiéro założone, będzie 1wſzy ściany termin: $p^m = a^{2 \times \frac{1}{2}} = a$, 2gi termin: $m p^{m-1} q = \frac{1}{2} a^{2 \times \frac{1}{2} - 1} q$, czyli odciągnąwſzy -1 albo $-\frac{2}{2}$ od $\frac{1}{2}$, będzie: $\frac{1}{2} a^{2 \times -\frac{1}{2}}$, czyli $\frac{1}{2} a^{-\frac{2}{2}} q$, to ieſt: $\frac{1}{2} a^{-1} \times \overline{2ab - 2ac}$, to ieſt: biorąc 1wſzy termin 2ab położony pod liniyką, i mnożąc wſpółczynnika $\frac{1}{2}$ przez wſpółczynnika 2 ilkości 2ab, będzie $\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$, które ſię opuſzcza; toż wykładnika ilkości a^{-1} wyraźnego, ilkości zaś 2ab domniemanego dodaiąc, podług przepisów na wykładniki w mnożeniu, będzie: $a^{-1+1} = a^0 b = 1b$, (gdyż $a^0 = 1$ przez Wykład V.) $= b$. Biorąc zaś i 2gi termin pod tąż liniyką położony $-2ac$, będzie iak piérwéy: $\frac{1}{2} a^{-1} \times -2ac = -a^{-1+1} c = -1c = -c$; więc ścianą ſzukaną będzie $a + b - c$. Póty bowiem tylko ſię idzie, póki ſię nie ſtanie na $m = 0$, co gdy ſię trafiło w $a^0 b$ i w $-a^0 c$, już tém ſamém wynalezione ſą wſzyſtkie terminy ściany ſzukanéy.

II. Niech będzie do wyciągnienia dana ściana ſześciogranna z ſtopnia: $a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$; będzie $a^3 = p$, $-3a^2b - 3ab^2 = q$, a że tu idzie o ścianę ſześciogranną, będzie $\frac{1}{3} = m$; kładąc już za p, q, m, ich ceny we dwóch prawidła ogólnego terminach, będzie: $p^m =$

$a^3 \times \frac{1}{3} = a$ pierwſzy termin ściermy. Potém $mp^{m-1} q = \frac{1}{3} a^{3 \times \frac{1}{3} - 1} q$, czyli odciągaiąc — 1 od $\frac{1}{3}$, będzie $\frac{1}{3} a^{3 \times -\frac{2}{3}} q$, mnożąc zaś, będzie: $\frac{1}{3} a^{-\frac{6}{3}} q$, to ieſt: $\frac{1}{3} a^{-2} q$, albo kładąc za q cenę iego: $\frac{1}{3} a^{-2} \times - 3a^2 b = -\frac{3}{3} a^{-2+2} b = - a^0 b = -1b = -b$. I na tém trzeba przeſtać, iako ſię wyżéy namieniło. Sciana więc ſześciogranna danego ſtopnia będzie: $a - b$ *i t.d.*

Przeſtroga. Kiedy cena litery m za wykładnika w prawidle położonéy nigdzie nie trafia ſię = 0, natenczas ściana danego ſtopnia będzie niedoſkonała, czyli, iak ią Algebryści nazywaią, nieracyonalna, *Radix irrationalis*, która mniéy, niż iednością chybia od doſkonałéy, ani żadną tak liczbą, iak literą wyrazić ſię nie może, a zatém wyciąganie onéy może ſię pociągnąć nieſkończenie czyli przez terminy nieſkończone, co ſię w Algebrze i Arytmetyce nazywa przybliżaniem ścian, *approximatio radicum*, o którém naſtępuiący §.

§ IX. *Wyciąganie ścian z ſtopniów niedoſkonałych przez przybliżanie czyli przez terminy nieſkończone.*

I. Wyciąganie takie żadnéy nowéy nie uczyni trudności trzymającemu ſię wyżéy opiſanego, a dopiéro użytego prawidła. Wziąwſzy bowiem z tego prawidła tyle początkowych terminów, przez ile ſię podoba mieć ścianę ciągnioną *np:* 4, albo 5; to ieſt: $p^m +$

mp

$mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3$, założyć litery p, q, m, za ilkości fkładaiące dany ftopień, z którego ma fię ściana ciągnąć przez przybliżanie, a wreście to wfzyftko czynić, co fię w przykładach wyżéy danych czyniło.

Daymy *np:* drugi ftopień czyli czworogran niedofkonały a^2-b^2; z którego ściana czworogranna ma fię wyciągać przez terminy niefkończone A. B. C; będzie: $p=a^2$, $q=-b^2$, m zaś, dla ściany czworogrannéy $=\frac{1}{2}$ przez Wykład III, azatém będzie:

A. ($p^m = a^2 \times \frac{1}{2}$, to ieft: $a^{\frac{2}{2}} = (a^1) = a$.

B. ($mp^{m-1}q = \frac{1}{2}a^{2 \times \frac{1}{2}-1}q$, to ieft: odciągnąwfzy -1, czyli $-\frac{2}{2}$ od $\frac{1}{2}$, a refztę $= -\frac{1}{2}$ rozmnożywfzy przez wykładnika ilkości $\frac{1}{2}a^2$, będzie: $\frac{1}{2}a^2 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^{-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}a^{-1}q$, czyli za q założywfzy iego cenę $-b^2$, będzie: $\frac{1}{2}a^{-1} \times -b^2$, czyli *naprzód*: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{a}$, (gdyż $a^{-1} = \frac{1}{a}$ przez Wykład IV.) $= \frac{1}{2a}$, *powtóre:* $\frac{1}{2a} \times -b^2 = -\frac{bb}{2a}$) $= -\frac{bb}{2a}$.

C. ($m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}-1) : 2$, to ieft: od $\frac{1}{2}$ odciągaiąc -1, a refztę $-\frac{1}{2}$ dzieląc przez 2, będzie wieloraz $-\frac{1}{4}$, a ten mnożąc przez $\frac{1}{2}$, będzie: $-\frac{1}{8}a^2$; toż famo znowu $-\frac{1}{8}a^2 \times \frac{1}{2}-2$, odciągaiąc -2 od $\frac{1}{2}$, a refztę $-\frac{3}{2}$ przez wykładnika ilkości a^2 mnożąc, będzie $-\frac{1}{8}a^{-3}q^2$, czyli przez IV. Wykład: $-\frac{1}{8aaa}q^2$; nareście za q^2 zakładaiąc $-b^2$ wyniefione do 2go ftopnia to ieft $+b^4$, przeto: że q^2 ieft czworogranne, będzie

dzie przez tenże Wykład : $- \frac{1b^4}{8a^3} = - \frac{b^4}{8a^3}$ *i t. d.*

Będzie więc ściana przez przybliżanie wyciągniona $A + B + C = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}$.

II. Sposób ten ciągnienia ściany przez przybliżanie zda się bydź niewdrożonym w takie rachuby przytrudnym i długim, lecz skoro się wdrożą, usnadnić go sobie i skrócić potrafią. Jeżeli atoli samo wdrażanie się zatrudnia, mogą innego prawidła od Newtona ułożonego użyć, które przeto iest wygodnieysze, że uymuje mozołu, który frakcye zadają, jako każdy w używaniu samém doświadczy. Jest zaś takie: $P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q + \frac{m-2n}{3n} C Q + \frac{m-3n}{4n} D Q$ *i t. d.*

Gdzie P wyraża 1wszy termin téy ilkości, któréy się ściana ma wyciągać, Q znaczy resztę terminów téyże ilkości podzielonych przez P czyli przez termin 1wszy, $\frac{m}{n}$ wyraża wykładnika czyli stopień ściany, litery zaś A, B, C, D znaczą terminy już wyciągnione to iest: A wyraża 1wszy termin ścienny wyciągniony $= P^{\frac{m}{n}}$; B 2gi termin $= \frac{m}{n} A Q$, C 3ci $= \frac{m-n}{2n} B Q$ *i t. d.* *Przykłady używanie tego prawidła pokażą.*

I.

I. Niech będzie dana do wyciągnienia ściana czworogranna z ilkości $\sqrt{c^2+x^2}$, będzie $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, gdyż Q wyraża resztę terminów daney ilkości podzieloną przez 1wszy, $m=1$, $n=2$ azatém wykładnik 2giego stopnia $\frac{1}{2}=\frac{m}{n}$. Będzie więc:

$$A\ (P^{\frac{m}{n}}=c^2\times\frac{1}{2})=c^1=c.$$

$$B\ (\frac{m}{n}A\ Q=\frac{1}{2}c\times\frac{x^2}{c^2}\text{ to iest: }\frac{c}{2}\times\frac{x^2}{c^2}=\frac{cx^2}{2c^2})=\frac{x^2}{2c}$$ *i t. d.*

II. Niech będzie dana do wyciągnienia ściana sześciogranna z ilkości $\sqrt{a^3-b^3}$, będzie $P=a^3$, $Q=-\frac{b^3}{a^3}$, $m=1$, $n=3$, azatém będzie.

$$A\ (P^{\frac{m}{n}}=a^3\times\frac{1}{3})=a^1=a.$$

$$B\ (\frac{m}{n}A\ Q=\frac{1}{3}a\times-\frac{b^3}{a^3})=-\frac{b^3}{3a^2}.$$

Prze-

Przestroga 1. Sposoby te wyciągania ścian przez terminy nieskończone, któreby się zbliżały do doskonałéy ściany, służą do wynalezienia płaszczyzn ziemiomiernczych, długości liniy krzywych, wymiaru wierzchołków brył, i innych wielkiéy wagi Mechanicznych robót, przeto obszérniéy tu nieco są wyłożone.

Przestroga 2. W stopniach niedoskonałych można częstokroć przestać na wyciągnionéy ścianie w terminach całkowitych, kiedy nie wiele zależy na téy reście, która po wyciągnieniu terminu ostatniego zostaie, kiedy zaś z opuszczenia téy reszty znaczny iaki brak mógłby wyniknąć, trzeba koniecznie albo danych Algebraicznych sposobów na wyciąganie ściany przez przybliżanie użyć, albo obróciwszy litery cały niedoskonały stopień wyrażające na liczby, za które też litery założóne były na początku działania, Arytmetycznym sposobem rzeczone ściany wyciągać, o którym w następującym Rozdziale.

ROZDZIAŁ III.

O Wyciąganiu ścian z liczb pospolitych.

ZE przy wyciąganiu ścian z ilkości Algebraicznych wyższostopniowych nieuchronna zdarza się potrzeba wyciągania tychże ścian z liczb pospolitych dlatego: iż w rezolwowaniu Problematów składanych Ekwacye

nie

nie ſamemi literami wyrażone bywają, lecz miewają częſtokroć i liczby przyłączone, a choćby i ſamemi ſię tylko literami wyrażały, te iednak obracają ſię na liczby przy końcu działania, a ztąd nieuchronna wynika potrzeba wyciągania z nich ścian Arytmetycznym ſpoſobem, a że doſtateczney nauki o wyciąganiu ścian z liczb wyżſzoſtopniowych w Arytmetykach Oyczyſtym językiem dotąd wydanych nie mamy, przeto: że tey nauki dać bez poprzedzającey Algebry trudno było; dlatego za rzecz użyteczną ſądzę, zbiór oney iak naydokładnieyſzy do tey części Algebry przyłączyć.

§ X. *O Składzie i rozbiorze Czworogranów liczbowych.*

Lubo Formuła ogólna wyżey opiſana $a^2 + 2ab + b^2$, albo $a^2 - 2ab + b^2$ doſkonale okazuie cały ſkład i każdą zoſobna część czworogranu nie mniey w liczbach, iako w ilkościach Algebraicznych do 2giego ſtopnia wynieſionych, wyrażaiąc *naprzód*: czworogran 1go terminu ściany przez a^2; *powtóre*: dwóykę 1wſzego terminu rozmnożoną przez termin 2gi wyrażaiąc przez + albo − 2ab; *potrzecie*: czworogran 2go terminu przez + b^2; że iednak w liczbie czworogranney części te nie tak ſą widoczne, iak w czworogranie Algebraiczn: gdyż w liczbach przerzeczone części iedne z drugiemi ſą zmieſzane, przeto nie

doſyć

dosyć iest na tém, co się w Rozd: II. powiedziało o czworogranach, trzeba nadto następuiących wiadomości.

I. Jeżeli dana liczba czworogranna iedną lub dwiema figurami iest wyrażona, ściana iéy czworogranna iedną tylko wyraża się figurą, a ta łatwo się znaydzie w Głowie każdego w używaniu Rachmistrzowską sztukę maiącego, albo w Tabliczce niżéy położonéy zawieraiącéy w sobie różne stopnie i ich ściany.

Sciany	Czworograny.	Sześciograny.	4te Stopnie.	5te Stopnie.
1	1	1	1	1.
2	4	8	16	32.
3	9	27	81	243.
4	16	64	256	1024.
5	25	125	625	3125.
6	36	216	1296	7776.
7	49	343	2401	16807.
8	64	512	4096	32768.
9	81	729	6561	59049.

Gdzie widoczna: że każda z liczb czworogrannych w 2giéy kolumnie umieszczonych ścianę ma wyrażoną jedną tylko figurą; tak *np:* 49 ma 7, 64 ma 8 *i t. d.* Przyczyna tego iest: iż naymnieysza ściana czworogranna składająca się ze dwóch figur iest liczba 10, a iéy czworogran 100 iest ze trzech już figur złożony; toć czworogran z iednéy lub dwóch figur złożony ściany nie może mieć tylko jedną figurą wyrażoną. Jeżeli zaś liczba iaka czworogranna 3 albo 4 figury w sobie zawiera, ściana jéy ze 2 tylko figur składać się powinna, gdyż naywiększa ściana czworogranna ze 2 figur złożona iest 99, a przecię czworogran iéy 9801 nie składa się tylko ze 4 figur. Naymnieysza zaś ściana ze 3 figur składająca się iest 100, któréy czworogran 10,000 zawiera figur 5. Jeżeli znowu dany czworogran złożony iest z 5 lub 6 figur, ściana iego 3 tylko figury mieć w sobie powinna; ponieważ naywiększa o 3 figurach ściana iest 999, któréy czworogran 998,001 nie ma w sobie tylko 6 figur, a naymnieysza ściana o 4 figurach iest 1000, któréy czworogran 1,000,000 zamyka w sobie 7 figur *i t. d.*

Zkąd się wnosi: że liczbę czworogranną kréskami tak przedzieliwszy, zaczynaiąc od ręki prawéy; żeby w każdéy przedziałce po dwie figur było prócz ostatniéy, gdzie iedna tylko czasem bywa, łatwo dowiedzieć się można:

żna: z wielu figur ściana tegoż czworogranu ma się składać. Jle bowiem w czworogranie zrobionych przedziałek, tyle będzie figur pomienioną ścianę składających; tak *np:* że w czworogranie: 3 | 74 | 24, trzy są przedziałki, toć w ścianie jego trzy muszą bydź figury *i t. d.*

II. Zeby już poznać jak naydoskonaléy cały skład liczby czworogrannéy, i dóyść każdéy części do składu iéy należnéy, weźmy przed oczy czworogran *np:* 529 zrobiony z ściany czworogrannéy 23. Wszakże, *naprzód*, iako ściana przerzeczona ze dwóch tylko figur iest złożona, tak czworogran 529 dwie tylko może mieć w sobie przedziałki to iest: 5 | 29; *powtóre:* 1wsza po lewéy stronie figura 2 ściany 23 iest na mieyscu dziesiątków, więc w rzeczy saméy iest =20, azatém czworogran iéy będzie 20×20=400. Lecz ten czworogran iest 1wszą częścią w składzie liczby: 5 | 29 przez § VI, więc zawierać się powinien w 1wszéy przedziałce jéy po lewéy stronie to iest: w liczbie 5, *potrzecie*: 2ga figura téyże ściany 23 czyli 3 iest pojedyncza, bo iest na mieyscu jedności, więc mnożąc przez nią dwóykę 1wszego terminu 2 zostającego na mieyscu dziesiątków =40, będzie 40×3 produkt =120. Aże dwóyka 1wszego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi iest drugą częścią liczby czworogrannéy przez wzmiankowany § VI; więc 120 zamykać się

musi

musi w reście 1wſzéy przedziałki danego czworogranu 5 | 29, która tu ieſt = 1 i w 1wſzéy figurze przedziałki 2giéy to ieſt: w liczbie 2; *naoſtatek*: termin 2gi ścienny 3 wynióſſzy do 2go ſtopnia, będzie czworogran = 9. Aże czworogran tego terminu ieſt 3cią częścią ſkładającą czworogran dany przez tenże § VI; więc mieścić ſię będzie w reście 2giéy jego przedziałki, to ieſt w liczbie 9. Cały tedy ſkład danego czworogranu mającego ścianę ze dwóch terminów złożoną ledwie nie tak oczywiście daje ſię widzieć w liczbach, iako w czworogranie Algebraicznym: $a^2 + 2ab + b^2$.

Wzór tego ſkładu.	*Czworogran.*	*Sciana.*
I. Czworog: 1go term:	5 | 2 9.	23.
ścien: to ieſt licz: 2×2 =	4 0 0.	
II. Dwóyka tegoż terminu rozmnożona przez 2gi, to ieſt: 4×3 =	1 2 0.	
III. Czworogran terminu 2giego, czyli 3×3 =	9.	
Części te w iednę ſummę zebrane =	5 2 9.	

Skąd ſię ogólnie wnosi: że, kiedy dany czworogran dwie ma w ſobie przedziałki, a zatém i w ścianie ſwoiéy dwa terminy, wten czas *naprzód*: czworogran 1wſzego terminu ściennego zamyka ſię w 1wſzéy przedziałce

danego

danego czworogranu ; *powtóre* : dwóyka tegoż terminu rozmnożona przez termin 2gi mieści się w reście 1wszéy przedziałki, ieżeli iaka iest, i w 1wszéy figurze przedziałki 2giéy ; *potrzecie* : czworogran 2go terminu zawiera się w reście téyże przedziałki 2giéy.

III. Chcąc zaś poznać skład czworogranu maiącego ścianę ze 3 terminów złożoną, weźmy *np*: czworogran 5 | 47 | 56 zrobióny z ściany 234. Wszakże *naprzód*: iako ściana ta nie ma w sobie tylko 3 figury, tak i czworogran tylko 3 przedziałki ; *powtóre* : 1wszy z lewéy strony termin ścienny 2 iest na mieyscu set, więc=200, azatém czworogran iego 200×200 =40,000 zawierać się musi w 1wszéy z lewéy ręki przedziałce danego czworogranu to iest : w liczbie 5 ; *potrzecie* : 2gi termin ścienny 3 iest na mieyscu dziesiątków, więc=30, więc dwóyka terminu 1wszego=4 rozmnożona przez 2gi = 3 uczyni w rzeczy saméy 400×30=12, 000, a zatém mieścić się będzie w reście 1wszéy przedziałki, która iest = 1, i w 1wszéy figurze przedziałki 2giéy to iest : w liczbie 4 ; *poczwarte* : ponieważ 2gi ścienny termin 3=30 (iako się rzekło) toć czworogran iego 30×30 =900 zawierać się musi w reście figury 1wszéy czyli w liczbie 2 i w drugiéy figurze téyże 2giéy przedziałki to iest : w liczbie 7. Ze zaś dany czworogran 5 | 47 | 56 ścianę ma ze trzech figur złożóną dla 3 w nim przedziałek ; więc

więc odkrywszy przerzeczonym sposobem części dwóch 1wszych terminów ściennych w skład czworogranu danego wchodzących, ukazać nadto trzeba ukryte w nim te części, które z 3go terminu ściennego tamże weszły. Potrzeba więc prócz tego, co się dotąd robiło, 1wsze dwa z lewéy strony terminy to iest 23 brać za ieden termin ścienny to iest: za termin 1wszy, 3cią zaś figurę ścienną to iest: 4 za termin 2gi tak, iak się działało w § VI, odkrywając skład czworogranów Algebraicznych. Aże 1wsze dwa terminy ścienne są na mieyscu set i dziesiątków, będą więc 23=230; biorąc ie zaś za ieden to iest: za 1wszy, będzie dwóyka terminu 1wszego rozmnożona przez 2gi, którym tu iest 3ci, czyli 460×4=1840, która nie tylko w reście 2giéy przedziałki; lecz i w 1wszéy figurze przedziałki 3ciéy danego czworogranu mieści się to iest w liczbach 185, czworogran zaś 2go ściennego terminu (którym tu iest 3cia figura 4) = 16 zawiéra się w reście téyże 3ciéy przedziałki, czyli w liczbie 16. Co wszystko pod oko podpada w następującym rozbiorze:

Wzór

Wzór ſkładu.	*Czworogran.*	*Sciana.*
I. Czworog: term: 1go ściennego to ieſt 2×2 =	5,4 7,56. 4,0000.	234.
II. Dwóyka term: 1go rozmnoż: przez 2gi, czyli 4×3 =	1 2000.	
III. Czworogran term: 2go czyli 3×3 =	900.	
IV. Biorąc z term: 23 za 1, dwóyka ich 46×4 =	1 8 4 0.	
V. Czworogran termin: 2go czyli 3ciéy figury 4×4 =	1 6.	
Summa =	5 4 7 5 6.	

Przeto ieżeli ściana danéy czworogrannéy liczby z 3 figur ſkłada ſię, a dwie 1wſze z lewéy ſtrony biorą ſię za 1wſzy termin ścienny, trzecia zas za 2gi; ogólnie wnieść ſię może *naprzód*: że dwóyka terminu 1wſzego tak wziętego rozmnożona przez termin 2gi, czyli figurę 3cią umieſzczona będzie w reście drugiéy przedziałki danego czworogranu i w 1wſzey figurze przedziałki 3ciéy; *powtóre*: że czworogran 2go terminu ściennego będzie zamknięty w reście téyże przedziałki 3ciéy. Co tak oczywiście daie ſię widzieć, iako w czworogranie Algebr: $a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2$ mającym ścianę trzykrotną: $a + b + c$.

Jako

Jako bowiem w tym ieſt *naprzòd*: a^2 czyli czworogran 1wſzego terminu ściennego; ieſt *powtóre*: 2ab czyli dwóyka terminu 1wſzego a rozmnożona przez termin 2gi b, ieſt *potrzecie*: b^2 czyli czworogran terminu 2go b; ieſt *poczwarte*: 2ac+2bc, czyli biorąc dwa 1wſze terminy a+b za ieden, dwóyka z nich 2a+2b rozmnożona przez 2gi termin to ieſt przez 3cią figurę c, ieſt *popiąte*: c^2 czyli czworogran 2go terminu albo 3ciéy figury c przez § VI; tak w danéy czworogrannéy liczbie 5,47,56 wſzyſtkie te części ſą widoczne.

IV. Gdyby zaś dany czworogran miał ścianę że 4rech terminów złożoną, iaki ieſt ten: 5,48,02,81 mający ścianę: 2341; wtenczas ukazawſzy tak, iak ſię czyniło dotąd, w rzeczonym czworogranie naprzód części dwóch 1wſzych terminów ściennych, potém części trzech 1wſzych za dwa wziętych, trzeba nadto dla 4tego terminu ścianę ſkładającego brać 1wſze trzy za ieden, a 4ty za 2gi, i znowu tak wziętego 1wſzego terminu dwóykę przez termin 2gi (to ieſt przez figurę 4tą) rozmnożoną odkrywać, która zapewne będzie ſię zamykała w reście 3ciéy przedziałki danego czworogranu i w 1wſzéy figurze przedziałki 4téy, a czworogran oſtatniego terminu znaydzie ſię w reście oſtatniéy przedziałki.

Wzór składu.	*Czworogran.*	*Sciana.*
	5,48,02,81.	2341.
I. Czworogr: term: 1go=	4000000	
Dwóyka term: 1go przez 2gi rozmnoż: czyli 4×3=	12,00000	
Czworogr. term: 2go to iest 3×3 =	90000	
II. Biorąc dwa term: za jed: dwóyka ich 46×4=	184000	
Czworogran term: 2go 4×4=	1600	
III. Biorąc trzy termin: 2 3 4 za jeden, dwóyka ich 468×1 =	4680	
Czworog: 2go term: 1×1=	1	
Summa=	5480281.	

Co równie jaśnie pokazuje się iako i w Algebraicznym czworogranie : $a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd + b^2 + c^2 + d^2$, którego ściana czworogranna iest : $a + b + c + d$.

V. Gdy nakoniec danego czworogranu ściana iest z 5, 6, lub więcéy ieszcze terminów złożona, wtenczas brać trzeba naprzód 1wsze dwa terminy ścienne pojedyńczo, potém dwa 1wsze za ieden, toż 3 1wsze za 1, toż dopiéro 4 lub 5 za 1, a ostatni za 2gi, i każdą zosobna tę część odkrywać w przedział-

kach

[k]ąch danego czworogranu. Do czego nie zatrudniaiąc ſię robotą długą czworogranów Algebraicznych maiących ściany wielokrótne, użyć można formuły ogólnéy: $a^2 + 2ab + b^2$, za któréy pomocą naprzód 1wſzych dwóch terminów poiedyńczo wziętych pokazać części $= a^2 + 2ab + b^2$, potém $2ab + b^2$ tychże dwóch terminów za ieden wziętych, toż wziętych za 3 lub 4. *i. t. d.* Oto tego wizerunek:

	Formuła.	*Czworogran.*	*Sciana.*
		(5,48,26,22,25)	23415.
I.	$a^2 =$	4	
	$+ 2ab =$	12	
	$+ b^2 =$	9	
II.	$+ 2ab =$	184	
	$+ b^2 =$	16	
III.	$+ 2ab =$	468 . . .	
	$+ b^2 =$	1 . .	
IV.	$+ 2ab =$	2341 . .	
	$+ b^2 =$	25	

Summa = 548262225.

§ XI. *Jak ſię wyciąga ściana czworogranna z danéy czworogrannéy liczby?*

Przepis 1. Dany czworogran określiwſzy, dzielę na części tak, żeby w każdéy przedziałce po dwie było figur; będzie niezawodnie ściana z tylu figur złożona, ile ieſt w liczbie

liczbie czworogrannéy przedziałek z przyczyny w § X. obſzérnie wyłuſzczonéy.

2. Jeżeli dany czworogran ma dwie tylko przedziałki, biorę, zaczynając z lewéy ſtrony, 1wſzą, w któréy zawiera ſię czworogran 1wſzego terminu ściennego i ſzukam tego czworogranu w tabliczcze wyżéy położonéy, gdzie ſię albo równy albo mało co mnieyſzy znaydzie, a ścianę ſwoię na przeciwko pokażę, którą za 1wſzy termin ścienny czworogranu danego kładę, czworogran zaś iego odciągam od 1wſzéy przedziałki, reſztę notuiąc.

3. Do téy reſzty (ieżeli iaka zoſtała) ſkładam 2gą przedziałkę, ieżeli zaś żadnéy nie maſz reſzty, tedy ſamą 2gą przedziałkę złożywſzy, oſtatnią iéy figurę odcinam, a 1wſze z lewéy ſtrony figury dzielę przez dwóykę 1wſzego terminu ściennego przez *Przep:* 2. znalezionego, wieloraz będzie 2gim ściennym terminem, który przyłączam do dzielnika to ieſt do wzmiankowanéy dwóyki, i przez niego tak też dwóykę, iako i iego ſamego mnożę, a produkt odciągam od reſzty danego czworogranu. Niech będzie *np:*

	Czworogran.	*Sciana.*
	(5, 2 9)	23.
A.	4.	
B.	1 2, 9.	
C.	4 3.	
D.	1 2 9.	

Przy A

Przy A ieſt czworogran z tabliczki wzięty od 1wſzéy danego czworogranu części to ieſt od 5 mało co mnieyſzy, którego ściana = 2 ieſt 1wſzym terminem ściennym. Przy B 1wſza figura 1 ieſt reſzta pozoſtała po odciągnieniu 4 od 5, do któréy 2ga przedziałka 29 złożona i oſtatnia iéy figura 9 ieſt odcięta. Przy C 1wſza figura 4 ieſt dwóyka 1wſzego terminu ściennego, przez którą dzieli ſię liczba 12 to ieſt reſzta 1wſzéy przedziałki i 1wſza figura 2giéy, a wieloraz 3 za 2gi termin ściany ogólnéy ieſt napiſany. Przy témże C do dzielnika 4 przyłącza ſię wieloraz jego czyli 2gi termin ścienny 3, i ſtaie ſię 43, co rozmnożywſzy przez tenże ſam termin czyli przez 3, wypada za produkt liczba niżéy przy D napiſana, i liniyką podkréślona, którą odciągnąwſzy od liczby B czyli od 129 nic nie zoſtaje, azatém czworogranu 529 ściana wynaleziona = 23.

4. Jeżeli dany czworogran więcéy niż dwie ma w ſobie przedziałki, ściana iego więcéy także niż dwa terminy zawierać musi, azatém wynalazłſzy, przez dane przepiſy, dwa 1wſze, brać trzeba za ieden termin ścienny, 3ci zaś ieſzcze niewiadomy za 2gi, i tymże ſamym ſpoſobem, który ieſt wyżéy przepiſany, naſtępujący termin wyciągać, to ieſt: do reſzty, ieżli iaka po 2giém odciągnieniu zoſtała, złożyć trzecią przedziałkę, i tę, odciąwſzy oſtatnią figurę, dzielić przez dwóykę terminu 1wſzego

go (biorąc zań, iako się rzekło, dwie figury ścienne) i tak wciąż działać, iak piérwéy. A ieśli po wyciągnieniu trzech terminów ściennych, 4ta ieszcze będzie w danym czworogranie przedziałka, tedy 3 terminy wynalezione za 1wszy wziąwszy a 4ty niewiadomy za 2gi, toż samo czynić, co się dotąd czyniło. Niech będzie *np:*

	Czworogran.	*Sciana.*
	(1, 7 4, 2 4.)	1 3 2.
A.	1.	
B.	7,4	
C.	2 3	
D.	6 9	
E.	5 2, 4	
F.	2 6 2	
G.	5 2 4.	

Przy A iest czworogran z tabliczki wzięty równy 1wszéy liczbie zawartéy w 1wszéy po lewéy stronie przedziałce, którego ściana = 1 kładzie się za 1wszy termin ścienny, a czworogran iego = 1 odciągniony od przedziałki 1wszéy, żadnéy nie ma reszty. Przy B iest 2ga przedziałka 74, w któréy ostatnia figura kré-

ską

ſką odcięta. Przy C 1wſza figura 2 ieſt dwóyka 1wſzego terminu sciennego, przez którą podzieliwſzy liczbę 7, wieloraz 3 kładzie ſię za 2gi termin ogólnéy ściany i przyłącza ſię do liczby 2 przy C, gdzie przez nią i przez ſiebie ſamego mnoży ſię, a produkt 69 położony przy D odciąga ſię od B, a do reſzty 5 przy E naſtępuiąca ſkłada ſię przedziałka. Przy F ieſt dwóyka wynalezionych dwóch terminów ściennych =26, przez którą liczba przy E przed kréſką położona to ieſt 52 dzieli ſię, a wieloraz =2 za nowy termin ścienny kładzie ſię, i do dzielnika 26 przyłącza ſię, toż cała liczba przy F przezeń ſię mnoży, a produkt 524 przy G napiſany od liczby E odciąga ſię bez żadnéy reszty; cała więc wyciągniona ściana =132.

5. Gdyby ſię zaś zdarzyło, żeby dwóyka terminu 1go była większa nad liczbę podzielną czyli tę, którą dzielić trzeba; natenczas za wieloraz albo za nowy termin ścienny piſze ſię 0, i ſkłada ſię naſtępuiąca przedziałka, która, oſtatnią odciąwſzy figurę, dzieli ſię przez dwóykę wſzyſtkich terminów ściennych już wynalezionych, wieloraz ſtąd wypadły, będzie nowym terminem ściennym, a dalſze działanie przepiſanym póydzie ſpoſobem. Niech będzie *np:*

	Czworogran.	*Sciana.*
	(4,24,3 6)	2 0 6.
A.	4	
B.	2,4	
C.	4	
D.	2 4 3, 6	
E.	4 0 6	
F.	2 4 3 6	

Przy A ieſt czworogran z tabliczki wzięty. Przy B ieſt 2ga przedziałka. Przy C ieſt dwóyka 1wſzego terminu ściennego, która ponieważ 1 razu nie mieści ſię w liczbie 2 przy B położonéy, przeto za 2gi termin ścienny piſze ſię 0. Przy D do 2giéy 3cia przedziałka ieſt przyłączona. Przy E 1wſze dwie liczby 40 ſą dwóyką dwóch terminów ściennych, przez które liczba 243 przy D dzieli ſię, a wieloraz 6 za 3ci termin ścienny kładzie, tudzież do liczby 40 przy E przyłącza ſię, i cała ta liczba przez tenże ſam termin mnoży ſię, a produkt 2436 przy F położony odciąga ſię od liczby D, po ktorém odciągnieniu gdy nic nie zoſtaje, ściana wyciągniona ieſt = 206.

6. Jeżeli z łomanéy liczby wyciągać przyydzie ścianę czworogranną, tę tak z licznika iako z mianownika podług dopiéro danych

Przepi-

Przepisów zosobna wyciągać potrzeba *np:* $\sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6$, gdyż iako $\sqrt{144} = 12$, tak $\sqrt{4} = 2$.

Okazanie tych Przepisów.

Jako skład czworogranów w § X. wyłuszczony pokazuje: że czworogran każdy nic innego nie iest tylko produkt ściany przez siebie rozmnożonéy, tak i Przepisy na wyciąganie ściany czworogrannéy dane dowodzą: że toż wyciąganie nic innego nie iest, tylko dzielenie czworogranu. Co nim się okaże, wprzód części tego dzielenia przełożę. Sam dany czworogran, z którego się ściana wyciąga, iest liczbą podzielną, ściana jego iest wielorazem, a części w skład czworogranu wchodzące bywają dzielnikiem coraz innym czyli za wyciągnieniem każdego terminu ściennego nanowo wyszukanym, i tém się to jedynie od pospolitego liczb dzielenia ścian wyciąganie różni: że tamto dzielnika na wszystkie liczby podzielne miéwa jednego, to coraz innego, tamtego dzielnik bywa dany, tego w składzie podzielnéy liczby nanowo wyszukany. Co żeby się jaśniéy okazało, a tém samém dowiodło: że przepisy na wyciąganie ścian czworogrannych dane są niezawodne, weźmy na uwagę Czworogran 529 za wzór składu i rozbioru czworogranów w § X, a za wzór wyciągania ścian czworogrannych w § XI położony

żony

żony. Wſzakże *naprzód*: tam ſię pokazało: że czworogranu rzeczonego 1wſza po lewéy ſtronie figura 5 zawiéra w ſobie czworogran 4 1wſzego terminu ściennego 2, tu zaś wyciągając z niego ścianę, czyli raczéy z tabliczki wziętą za 1wſzy termin ścienny kładąc, nic innego ſię nie czyni, tylko w rzeczy ſaméy wzmiankowana figura 5, dzieli ſię przez 2, a wieloraz 2 kładzie ſię za 1wſzy termin ścienny, i daléy, iak w dzieleniu poſpolitém, produkt z rozmnożenia wieloraza przez dzielnika wypadły odciąga ſię od liczby podzielnéy, tak i tu czworogran 1wſzego terminu ściennego iako podobny tamtemu produkt odciąga ſię od 1wſzéy przedziałki danego czworogranu iako od ſwoiéy liczby podzielnéy, więc przepiſy 1wſzy i 2gi ſą oczywiſte. *Powtóre*: pokazało ſię w tymże przykładzie: iż w reście przedziałki 1wſzéy i w 1wſzéy figurze, 2giéy przedziałki czyli w liczbie 12 zawiéra ſię dwóyka 1go terminu ściennego rozmnożona przez 2gi, dlatego wyciągaiąc tenże 2gi termin, liczba 12 podzieliła ſię przez rzeczoną dwóykę, to ieſt przez 4, a wieloraz 3 położył ſię za termin 2gi. Albowiem każdy produkt wypada z mnożenia dwóch liczb, z których maiąc jednę wiadomą i dzieląc przez nią tenże produkt znayduje ſię 2ga niewiadoma, co ſię i tu uczyniło, iako przez ſię rzecz widoczna, więc i tego terminu wyciąganie było dzieleniem czynionym przez nowo znalezionego dzielnika

w ſkła-

w ſkładzie liczby czworogrannéy. Dlatego zaś przy tymże dzielniku położył ſię wieloraz czyli termin 2gi ścienny, żeby, mnożąc przez niego ſamego całą liczbę 43, wypadła w produkcie dwóyka 1wſzego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi z czworogranem tegoż 2go, i żeby obydwa te produkta odciągnione były od reſzty danego czworogranu, w którym ſą umieſzczone; (co ſię jedynie czyni dla porządnego i krótſzego działania) więc i 3ci przepis na regułach dzielenia i ſkładzie wewnętrznym czworogranów zaſadzony ieſt niezawodny. *Potrzecie:* Przepis 4 równie pewny ieſt iako i 3ci, ponieważ na iednémże z nim działaniu zaſadza ſię, i tém tylko od niego różni ſię: że każe dwa terminy 1wſze ściany wyciągnionéy brać za ieden, a 3ciego ſzukać tak, iak 2go, dzieląc reſztę danego czworogranu przez nowego dzielnika z dwóyki dwóch terminów zrobionego, a tak i tu oczywiſta: że wyciąganie ściany ieſt dzieleniem z ſkładem i rozbiorem czworogranów zgodném. *Poczwarte:* Przepis 5. tenże ſam ieſt, którego ſię w zwyczayném liczb dzieleniu trzymamy, gdzie ieżeli dzielnik w liczbie podzielnéy nie mieści ſię ani razu, za wieloraz piſzemy o, a do liczby podzielnéy naſtępującą ſkładamy figurę *i t.d.*

Przepis oſtatni przez ſię iaſny. Jeżeli bowiem wynoſząc łomaną liczbę do 2go ſtopnia, wynosiemy naprzód licznika, potém mianowni-

ka

ka, iako się mówiło w § II, toć wyciągaiąc z niéy ścianę czworogranną, wyciągnąć ią powinniśmy naprzód z licznika, toż z mianownika.

Przestroga 1. Gdyby w danym czworogranie po ostatniém odciągnieniu reszta iaka została; znakbyto był: iż dany czworogran nie iest doskonały i ściana iego nie iest rzeczywista, czyli taka, którąby się mogła wyrazić liczbą; więc w tym razie trzeba wyciąganie ściany kontynuować przez przybliżanie, *per approximationem*, co się następuiącym sposobem robi. Niech będzie dana liczba niedoskonale czworogranna 147, z któréy podług danéy nauki ścianę = 12 wyciągnąwszy, zostanie reszta = 3, którą obracam na frakcyą maiącą za mianownika 1, potém przydaię do licznika i mianownika po parze, lub po tyle par cyfer, ile mi się podoba, stanie się frakcya $\frac{300}{100}$ = 3, to iest równa reście, która była została, dopiéro wyciągam ścianę czworogranną pojedyńczo z licznika i z mianownika podług danych przepisów, cyfry biorąc zawsze za przyłączoną przedziałkę, to iest: wziąwszy naprzód licznika 30,0, dwie 1wsze kréską odłączone liczby dzielę przez dwóykę ściany wynalezionéy 12 czyli przez 24, wieloraz = 1 będzie licznikiem frakcyi nowy termin ścienny wyrażać maiącéy, mianownikiem zaś nowym będzie wyciągniona z 1wszego mianownika 100 ściana = 10, azatém

wzmian-

wzmiankowanego niedoſkonałego czworogranu ściana dotąd ciągniona będzie $= 12 + \frac{1}{10}$, ale że i po tém odciągnieniu zoſtaje reſzta 59, gdyż przez Przepis 3ci, do dzielnika 24 przyłączając wieloraz 1 tak, żeby ſię ſtała liczba $=$ 241, a tę liczbę, bez mnożenia iéy przez tenże ſam wieloraz, bo 1 nie mnoży, odciągaiąc od 300, zoſtaje reſzta 59, w którey ukryta ieſzcze ieſt iakaś cząſtka ściany czworogrannéy. Szukaiąc iéy więc przez przybliżanie, dodaię znowu tak do reſzty téy, iako i do mianownika 1wſzego tyle par cyfer, ile przedtém, będzie frakcya $\frac{5900}{10000}$; tego już mianownika ściana czworogranna ieſt $= 100$; z licznika zaś wyciągniona tak, iak piérwéy, będzie $= 2$. Albowiem napisawſzy tak, iak przedtém 590,0, i 590 podzieliwſzy przez dwóykę terminów ściennych wynalezionych to ieſt: przez 242 (biorąc z całkowitemi razem i licznika frakcyi) wypadnie wieloraz $= 2$ za licznika nowego terminu ściennego frakcyą także wyrażać ſię maiącego, azatém ciągniona dotąd ściana będzie $= 12 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$. Lecz i tu ieſzcze ieſt reſzta $= 1056$, w którey cząſtka iakaś ściany ukryta ieſt. Reſzta ta taką wyrazi ſię frakcyą $\frac{105600}{1000000}$, którey mianownika ściana ieſt $= 1000$, z licznika zaś wyciągnąwſzy podług przepiſów danych, będzie $= 4$ *i t. d.* bez końca.

Przeſtroga 2. chcąc doświadczyć ściany wyciągnionéy, wynieść ią trzeba do 2go ſtopnia, a reſztę, ieżeli iaka przy ciągnieniu

zoſtała,

zoſtała, do tegoż ſtopnia przydać, ſtopień ten ieżeli dany wróci czworogran, znakiem będzie: że ściana dobrze z niego wyciągniona.

§ XII. *O ſkładzie i rozbiorze Sześciogranów liczbowych.*

I. Chcąc gruntownie poznać ſkład wewnętrzny ſześciogrannéy liczby, potrzeba naprzód wiedzieć: z wielu terminów ma ścianę ſwoię złożoną taż liczba, powtóre: iak te terminy ścienne do ſkładu iéy wewnętrznego wpływaią. Co do 1wſzego, nic łatwieyſzego, iak dowiedzieć ſię o liczbie terminów ściany ſześciogrannéy. Podzieliwſzy bowiem dany ſześciogran tak, żeby w każdéy przedziałce po trzy były liczby (prócz oſtatniéy z lewéy ſtrony przedziałki, gdzie dwie lub iedna tylko być może) tyle niepochybnie będzie terminów ściennych, ile przedziałek w danym ſześciogranie. Przyczyna tego ieſt ta: iż ſześciograny wypadaią z mnożenia, kiedy liczba iaka za ścianę ſześciogranną wzięta mnoży ſię naprzód przez ſiebie ſamą, potém przez produkt z 1wſzego mnożenia wypadły; toć ile figur w takiéy liczbie czyli ścianie ieſt, tyle ſzczególnych produktów z mnożenia wypadać muſi, aże te ſzczególne produkta ſą częściami składaiącemi ſześciogran, toć tyle tych części czyli przedziałek w ſześciogranie być powinno, ile ieſt figur w liczbie mnożnéy za ścianę ſześciogranną wziętéy, i przeciwnie,

ile

ile części czyli przedziałek, tyle figur w ścianie sześciogrannéy. Co z natury samego mnożenia wypływa. Co do 2go; żeby się dowiedzieć: iak terminy ścienne do wewnętrznego składu liczby sześciogrannéy wchodzą, i żeby ie w niéy widocznie pokazać; trzeba wziąć formułę w § VII. opisaną, to iest: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ wyrażającą części, z których się składa d skonały sześciogran maiący dwukrotną czyli ze dwóch terminów złożoną ścianę $a + b$. Formuła ta widocznie pokazuie skład cały sześciogrannéy liczby maiącéy ścianę z 2 terminów złożoną, to iest pokazuje: że przerzeczona liczba ma w sobie I. sześciogran 1wszego terminu ściennego wyrażony przez a^3. II. Ma troisty czworogran tegoż 1wszego terminu rozmnożony przez termin 2gi, co się wyraża przez $3a^2b$. III. Ma ieszcze troisty termin 1wszy rozmnożony przez czworogran terminu 2go, co się wyraża przez $3ab^2$. IV. Ma nadto sześciogran terminu 2go wyrażony przez b^3. Skąd łatwo i to wnieść można: że 1wsza z tych części to iest sześciogran terminu 1wszego zawierać się musi w pierwszéy przedziałce danego sześciogranu, 2ga w reście 1wszéy przedziałki i w 1wszéy figurze 2giéy przedziałki, 3cia w reście téyże 1wszéy figury i w całéy 2giéy, 4ta w pozostałéy reście przedziałki 2giéy. Skład ten da się jaśnie widzieć w następującym przykładzie:

Wzór

Wzór ſkładu.	*Sześciogr: Sciana.* (12,167) 23.
I. Sześciogran termin: 1go to ieſt : 20×20×20=	8000
II. Troiſty Czworog: term: 1go rozmnożony przez 2gi to ieſt: 1200×3=	3600
III. Troiſty term: 1wſzy przez 2go czworogran rozmnożo: to ieſt: 60×9=	540
IV. Sześciogr: term: 2go to ieſt: 3×3×3 =	27.
Summa tychże części=	12167.

II. Z równą łatwością odkryć można części i w takim ſześciogranie, którego ściana ieſt ze 3¦ terminów złożona, o tém tylko pamiętać tu potrzeba; żeby w 1wſzych dwóch przedziałkach odkrywſzy części 1wſzych 2óch terminów ściennych, to ieſt ſześciogran 1go terminu ściennego, troiſty czworogran terminu 1wſzego rozmnożony przez termin 2gi, troiſty termin 1wſzy rozmnożony przez czworogran 2go, i ſześciogran tegoż 2go terminu; żeby mówię, dla pokazania pozoſtałych w danym ſześciogranie części brać dwa 1wſze terminy ściany znalezionéy za ieden, a 3ci ieſzcze niewiadomy za 2gi, i znowu nowe terminy podobnie, iak piérwéy, odkrywać w reście przedziałki 2giéy i w 3ciéy całéy przedział-

ce

ce, to ieſt: pokazać tam troiſty czworogran 1wſzego terminu (dwa za ieden biorąc) rozmnożony przez 2gi (którym tu będzie 3ci) potém troiſty termin 1wſzy rozmnożony przez czworogran 2go, nakoniec ſześciogran 2go terminu. Rozbiór ten ſnadniéy i bez omyłki póydzie, zażywaiąc do niego formuły ogólnéy. Niech będzie *np*:

Formuła.	*Sześciogran.*	*Sciana.*
	(11,390,625)	225.
I. Biorąc pojedyńczo 2 terminy ścienne, będzie: a^3=	8000000.	
II. + $3a^2b$=	2400000.	
III. + $3ab^2$=	240000.	
IV. + b^3=	8000.	
V. Biorąc dwa 1wſze za ieden, będzie: $3a^2b$=	726000.	
VI. + $3ab^2$=	16500.	
VII. + b^3=	125.	
Summa =	11 390625.	

Gdzie I. a^3 pokazuje ſześciogran 1wſzego terminu ściennego 2 czyli 200 × 200 × 200 = 8,000,000. II. $3a^2b$ wyraża troiſty czworogran tegoż terminu 1go rozmnożony przez 2gi to ieſt: 120000×20= 2,400,000. III. $3ab^2$ pokazuje troiſty termin 1wſzy rozmnożony przez czworogran terminu 2go to ieſt: 600×400= 240, 000. IV. b^3 pokazuje ſześciogran terminu 2go to ieſt: 20 × 20 ×20= 8000. V. $3a^2b$ wyraża troiſty czworogran

dwóch terminów 1wſzych za ieden wziętych rozmnożony przez termin 3ci za drugi wzięty to ieſt: $145200 \times 5 = 726,000$. VI. $3ab^2$ wyraża troiſty termin 1wſzy, wziąwſzy za ieden dwa, rozmnożony przez czworogran 2go to ieſt: $660 \times 25 = 16500$. Naoſtatek b^3 pokazuje ſześciogran 2go terminu ściennego to ieſt liczby 5, który ieſt $= 125$, a te wſzyſtkie części w iednę ſummę znieſione przywracają dany ſześciogran.

III. Podobnym ſpoſobem pokazać można ſkład ſześciogranu mającego ścianę z 4 i więcéy terminów złożoną, byle brać naprzód 2 1wſze terminy ścienne pojedyńczo, potém 1wſze 2 razem za 1, a 3ci za 2gi; toż 3 razem 1wſze za jeden, a 4ty za 2gi *i t. d.* do całéy téy roboty tak używając formuły, iako ſię pokazało w I. przykładzie. Niech będzie ieſzcze.

Formuła.	*Sześciogran.*	*Sciana.*
	1,869,959,168.	1232.
I. $a^3 =$	1	
$+ 3a^2b =$	6........	
$+ 3ab^2 =$	1 2	
$+ b^3 =$	8	
II. $3a^2b =$	1 2 9 6	
$+ 3ab^2 =$	3 2 4	
$+ b^3 =$	2 7 ...	
III. $3a^2b =$	90774 ..	
$+ 3ab^2 =$	1476.	
$+ b^3 =$	8	
Summa =	1869959168.	

§ XIII.

§ XIII. *Jak ſię wyciąga ściana ſześciogranna z danéy w trzecim ſtopniu liczby?*

I. Mając wiadomy ſkład liczby ſześciogrannéy, nie dozna ſię żadnéy trudności w wyciąganiu ściany jéy. Do tego bowiem dość będzie mieć przed oczyma Formułę ſześciogranną: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ i podług naſtępujących przepiſów działać.

Przepis 1. Dany ſześciogran określiwſzy i na części tak podzieliwſzy, żeby w każdéy przedziałce po 3 były liczby, jako ſię powiedziało; brać trzeba 1wſzą z lewéy ſtrony przedziałkę, gdzie ſię mieści ſześciogran 1wſzego terminu ściennego wyrażony przez a^3, a tego poſzukawſzy na tabliczce pod § X. położonéy, i równy albo bliſko przychylaiący ſię tam znalazſzy, ścianę iego tamże znayduiącą ſię za 1wſzy termin ścienny napiſać, iego zaś ſamego od 1wſzéy przedziałki odciągnąć, i reſztę pod liniyką zanotować.

Przepis 2. Do reſzty, ieżeli iaka zoſtała, 2gą złożyć przedziałkę, a ieżeli żadney nie maſz reſzty, ſamą przedziałkę 2gą niżéy ſpuścić i dwie oſtatnie figury kréſką odciąć, gdzie ſię 3 części ścienne zawieraią, to ieſt: troiſty czworogran terminu 1go sciennego rozmnożony przez 2gi, troiſty termin 1wſzy rozmnożony przez czworogran 2go, i ſześciogran 2go terminu, czyli: $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, azatém chcąc wynaleść termin 2gi ścienny, trzeba re-

ſztę 1wſzéy przedziałki i 1wſzą figurę 2giéy podzielić przez 3a² to ieſt przez troiſty czworogran terminu 1wſzego ściennego już znalezionego, wieloraz będzie 2gim terminem ściennym, który maiąc, trzeba przerzeczone wſzyſtkie 3 części z wynalezionych dwóch terminów ściennych porobić, to ieſt *naprzód*: z 1wſzego terminu ściennego zrobiony czworogran i trzy razy wzięty rozmnożyć przez termin 2gi, a produkt ten tak pod reſztą 1wſzéy przedziałki i pod przedziałką 2gą piſać, żeby oſtatnia jego figura padła pod 1wſzą figurę 2giéy przedziałki; *powtóre*: z 2go terminu ściennego zrobiony czworogran rozmnożyć przez tróykę terminu 1wſzego, a produkt ten tak znowu piſać, żeby oſtatnia iego figura padła pod drugą figurę 2giéy przedziałki, *potrzecie*: ſzeſciogran z 2go terminu zrobiony piſać tak, żeby oſtatnia jego figura była pod oſtatnią figurą téyże przedziałki 2giéy. *Naoſtatek*: trzy te produkta w iednę ſummę zebrać, i od reſztzy tak 1wſzéy przedziałki, ieżeli ieſt iaka, iako i 2giéy odciągnąć, a ieżli doſkonały ieſt ſześciogran dany i dwie tylko ma w ſobie przedziałki, ściana jego ze 2 terminów złożona tym ſpoſobem zupełnie będzie wyciągniona. Gdzie pilnie uważać potrzeba tak rzeczoną ſummę, iako i reſztę, żeby 1wſza od 2giéy albo mnieyſza była, albo iéy równa, inaczéy znak będzie: że dzielnik nie tyle razy mieści ſię w podzielnéy licz-

bie,

bie, ile ieſt brany; przeto wieloraz trzeba zmnieyſzyć iednością i na nowo ſzukać produktów.

Przepis 3. Jeśli 3cia ieſzcze ieſt przedziałka w danym ſześciogranie, tedy ta do reſzty, ieżeli iaka zoſtała, przyłączona zamykać w ſobie będzie I. $3a^2b$ to ieſt. troiſty czworogran 1wſzego terminu ściennego (ale tu już za 1wſzy termin brać trzeba obydwa 1wſze wynalezione) rozmnożony przez termin 2gi, którym w tym razie będzie termin 3ci ścienny ieſzcze niewiadomy; II. $3ab^2$, to ieſt czworogran terminu 2go (którym tu będzie 3ci, iak ſię rzekło) rozmnożony przez troiſty termin 1wſzy ze dwóch złożony; III. b^3 to ieſt: ſześciogran terminu 2go, którym będzie 3ci ieſzcze niewiadomy, azatém chcąc go wynaleść, trzeba reſztę, iezli ieſt iaka, 2giéy przedziałki i 1wſzą figurę 3ciéy przedziałki kréſką odłączoną podzielić przez $3a^2$ czyli przez troiſty czworogran terminu 1go, dwa razem za ieden biorąc, wieloraz ſtąd wypadły da termin 3ci ściany ſześciograniéy. Ten już maiąc, znowu ſpoſobem w 2gim przepisie podanym troiſty czworogran terminu 1wſzego (biorąc zawſze dwa za ieden) rozmnożywſzy przez termin 2gi tak piſać pod reſztą 2giéy i pod 1wſzą figurą 3ciéy przedziałki, żeby oſtatnia jego figura była pod 1wſzą figurą przedziałki 3ciéy, a czworogran 2go terminu rozmnożony przez troiſty termin 1wſzy żeby

miał

miał ostatnią swą figurę pod przedostatnią figurą téyże przedziałki, pod ostatnią zaś sześciogran 2go terminu, które to części w iednę summę zniesione i od reszty 2giéy i 3ciéy przedziałki odciągnione nie zostawuiąc innéy reszty, pokażą: że ściana trzykrotna zupełnie wyciągniona.

Przepis 4. Podobnym sposobem wyciąganie ściany ze czterech lub więcéy ieszcze figur złożonéy odprawi się, byle przystępuiąc do 4téy przedziałki, trzy 1wsze terminy ścienne wynalezione za ieden się brały, to iest za 1wszy, a 4ty niewiadomy za 2gi termin, przystępując zaś do przedziałki 5téy, żeby cztéry wiadome za 1wszy, a 5ty niewiadomy za 2gi termin był brany *i t. d.*

Przepis 5. Jeżeli w ciągnieniu ściany sześciogrannéy zdarzy się: iż trojaki czworogran terminu 1wszego ściennego większy będzie nad liczbę przez niego dzielić się maiącą, natenczas za wieloraz czyli za nowy termin ścienny pisze się o, a do liczby podzielnéy następująca przyłącza się przedziałka, która, dwie ostatnie figury odciąwszy, dzieli się przez trojaki czworogran wszystkich wiadomych ściennych figur za 1wszy termin wziętych, a wieloraz pisze się za nowy termin ścienny. Obaczmy użycie tych przepisów w przykładach.

Sze-

	Sześciogran I.	*Sciana.*
	(12,167.)	23.
A.	8	
	—	
B.	41,67.	
C.	12	
	—	
D.	36.	
E.	5 4.	
F.	27.	
	—	
G.	41 67.	

Przy A ieſt ſześciogran z tabliczki wzięty. Przy B 1wſza liczba 4 ieſt reſzta po odciągnieniu 8 od 12, inne liczby ſą z przedziałki 2giéy, z których 2 oſtatnie kréſką ſą odłączone.

Przy C ieſt troiſty czworogran 1wſzego terminu ściennego czyli liczby 2, przez który reſzta 1wſzéy przedziałki i pierwſza figura 2giéy przedziałki, czyli liczba 41 podzielona za wieloraz daje 2gi termin ścienny 3.

Przy D jeſt troiſty czworogran terminu 1wſzego ściennego rozmnożony przez 2gi, i tak napiſany, że oſtatnia jego figura 6 pada pod 1wſzą figurę przedziałki 2giéy to ieſt pod 1.

Przy E ieſt czworogran terminu 2go rozmnożony przez troiſty termin 1wſzy to ieſt: 54 i tak napiſany: że oſtatnia jego figura 4 ieſt pod przedoſtatnią figurą przedziałki 2giéy.

Przy

Przy F ieſt ſześciogran terminu 2go ściennego, przy G ſumma tych produktów równa reście B, ściana więc = 23

	Sześciogran II.	*Sciana*
	(30,371,328)	312.
A.	27	
B.	3;371	
C.	27	
D.	27	
E.	9	
F.	1	
G.	2791	
H.	5803,28	
I.	2883	
L.	5766	
M.	372	
N.	8	
O.	580328.	

W tym przykładzie 1wſze dwa terminy ścienne 31 tak ſą ciągnione iak ściana dwukrotna w przykładzie 1wſzym, i od A aż do H nie maſz nic tylko części pojedyńczych 2 terminów ściennych wyrażonych przez $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, po których odciągnieniu do pozoſtałéy reſzty 580 przyłącza ſię 3cia przedziałka 328, gdzie oſtatnie dwie figury kréſką ſię odcinają. Przy I

Przy I ieſt troiſty czworogran 1wſzych 2ch terminów ściennych za ieden wziętych, przez który reſzta 2giéy przedziałki i 1wſza figura 3ciéy czyli liczba 5803 dzieli ſię, a wieloraz 2 za 3ci ſię termin ścienny piſze.

Przy L ieſt troiſty czworogran terminu 1wſzego ściennego (dwa tu już biorąc za ieden) rozmnożony przez termin 2gi to ieſt przez figurę ścienną 3cią, którego oſtatnia figura przypada pod 1wſzą podziałki 3ciéy.

Przy M jeſt czworogran terminu 2go czyli figury ściennéy 3ciéy rozmnożony przez troiſty termin 1wſzy ze dwóch złożony, którego oſtatnia figura ieſt pod przedoſtatnią przedziałki 3ciéy.

Przy N ieſt ſześciogran 2go terminu czyli figury 3ciéy ściennéy, którego oſtatnia figura kładzie ſię pod oſtatnią figurą téyże przedziałki.

Przy O ieſt ſumma tych produktów, po któréy odciągnieniu od reſzty przedziałki 2giéy i od całéy trzeciéy przy H położonéy, gdy nic nie zoſtaje, znak ieſt: iż wyciągniona z danego ſześciogranu ściana ieſt =312.

Sześcio-

Sześciogran III. *Sciana.*

	(27,270,901)	301.
A.	27	
B.	2,70	
C.	27.	
D.	2709,01.	
E.	2700	
F.	2700	
G.	90	
H.	1	
I.	270901	

W tym przykładzie daje się widzieć potrzeba zachowania Przepisu 5tego. Albowiem po odciągnieniu bez reszty sześciogranu 1wszego terminu ściennego od przedziałki 1wszéy, złożywszy przy B przedziałkę 2gą, i 1wszą iéy figurę kréską odłączywszy, widzę: że liczby 2 przez troisty czworogran terminu 1wszego przy C położony dzielić nie można dlatego: że ten dzielnik większy iest nad liczbę podzielną; więc napisawszy za 2gi termin ścienny 0, do 2giéy przedziałki przyłączam 3cią przy D i kréską odciąwszy dwie ostatnie figury, 1wsze dzielę przez troisty czworogran dwóch ściany wynalezionéy terminów to iest przez 2700, a wieloraz 1. piszę za 3ci termin ścienny, toż

troisty

troisty czworogran 1wszych dwóch terminów 30 za ieden wziętych rozmnożony przez termin 2gi to ieſt przez 1 z czworogranem 2go terminu rozmnożonym przez troisty termin 1wszy, tudzież z ſześciogranem terminu 2go w iednę ſummę zebrawszy przy I, odciągam od obydwóch przedziałek przy D położonych, po którém odciągnieniu gdy nic nie zostaje, ściana danego ſześciogranu = 301.

Sześciogran IV. *Sciana.*

(1,8 69,959,168) 1232.

```
      1
    ———
      8,69
      3
     ——
      6
      12
        8
     ———
     728
A.   1419,59
      432
     ————
     1296
      324
        27
     ————
B.   132867
C.      90921,68
D.      45387
       —————
E.      90774
F.        1476
G.           8
       ——————
H.      9092168.
```

W tym przykładzie wyciągnąwſzy 3 termi-
ny ſpoſobem dopiéro pokazanym i liczby przy B położone od położonych przy A odciągnąwſzy, do reſzty przy C napiſanéy przydana ieſt przedziałka 4ta, gdzie liczby 1wſze kréſką oddzielone przez troiſty czworogran terminu 1wſzego ściennego (wſzyſtkie trzy razem biorąc za ieden) położony przy D dzieląc, wieloraz 2 piſze ſię za 4ty termin ścienny, toż troiſty czworogran 1wſzego terminu ściennego czyli wſzyſtkich trzech 1wſzych rozmnożony przez oſtatni termin 2 przy E, a czworogran terminu oſtatniego 2 rozmnożony przez tróykę wſzyſtkich trzech 1wſzych przy F, tudzież ſześciogran tegoż terminu 2 przy G napiſawſzy, w iednę ſię zbieraią ſummę przy H, która odciągniona od reſzty 3ciéy i całey 4téy przedziałki żadnéy nie zoſtawuje reſzty, azatém ściana = 1232.

II. Jeſt i drugi ſpoſób wyciągania ściany ſześciogrannéy krótſzy i łatwieyſzy, iako ſię zdaje, którego poſpolicie Rachmiſtrze używaią, ale ten zaſadza ſię na 1wſzym iako jaśnieyſzym i gruntownieyſzym. Jeſt zaś taki, *naprzód*: wynalazłſzy 1wſzy termin ścienny tymże ſamym ſpoſobem, który ieſt podany w przepisie 1, i ſześciogran iego od 1wſzéy przedziałki odciągnąwſzy, do reſzty ſkłada ſię 1wſzy tylko termin 2giéy przedziałki; *powtóre*: reſzta, ieżli iaka zoſtała, i złożona 1wſza figura przedziałki 2giéy dzieli ſię przez troiſty

czwo-

czworogran terminu 1wſzego ściennego znalezionego, a wieloraz za 2gi ſię termin ścienny piſze, toż z obydwóch terminów ściennych zrobiwſzy ſześciogran, od obywóch razem wziętych przedziałek danego ſześciogranu odciąga ſię, i reſzta ſię notuje; *potrzecie*; do téy reſzty, ieżeli ieſt iaka, ſkłada ſię znowu naſtępuiącéy przedziałki 1wſza figura, i dzieli ſię przez troiſty czworogran obydwóch terminów razem wziętych ściany znalezionéy, wieloraz da 3ci termin ścienny, z których wſzyſtkich trzech zrobiony ſześciogran i od wſzyſtkich 3ech przedziałek odciągniony kończy działanie, ieżli 3 tylko były przedziałki; *poczwarte*: ieżliby zaś więcéy ich, niż 3 było w danym ſześciogranie, wtenczas po 3ciém odciągnieniu ſześciogranu 3 terminów ściennych, do reſzty pozoſtałéy znowu ſię ſkłada naſtępującéy przedziałki 1wſza figura, i znowu dzieli ſię przez troiſty czworogran wſzyſtkich znalezionych terminów *i t. d.* Niech będzie

	Sześciogran dany.	*Sciana.*
	(12,167)	23
A.	8	
	——	
B.	41	
C.	12	
	———	
D.	12 167.	

Przy A ieſt ſześciogran z tabliczki wzięty, którego ściana 2 ieſt 1wſzym terminem ściennym. Przy

Przy B jeſt reſzta po odciągnieniu tegoż ſześciogranu od 1wſzéy przedziałki, i przyłączona do niéy 1wſza figura przedziałki 2giey.
Przy C jeſt troiſty czworogran 1wſzego terminu, przez który podzielona liczba leżąca przy B daje 2gi termin ścienny to ieſt 3. Nakoniec przy D ieſt ſześciogran z obydwóch terminów ściennych zrobiony, który że ieſt równy danemu, nic po jego odciągnieniu nie zoſtaje, azatém ściana wyciągniona =23.

	Sześciogran dany.	*Sciana.*
	(11,390,625)	225.
	8	
A.	33	
B.	12	
C.	11390	
D.	10648	
E.	7426	
F.	1452	
G.	11390625.	

Przy A ieſt reſzta 1wſzéy, i 1wſza figura 2giéy przedziałki.
Przy B ieſt troiſty czworogran terminu 1wſzego ściennego, przez który liczba przy A podzielona daje termin 2gi scienny. Przy C

ſą

ſą dwie 1wſze przedziałki danego ſześciogranu, od których ſześciogran z 1wſzych dwóch terminów ściennych to ieſt ze 22 zrobiony i przy D położony odciągnąwſzy, reſzta 742 przy E kładzie ſię a do niéy przyłączą ſię 6 1wſza figura przedziałki 3ciéy. Ta zaś liczba cała przez trojaki czworogran 1wſzych 2 terminów ściennych położony przy F podzielona daje 3ci termin ścienny, z których wſzyſtkich 3 razem wziętych zrobiwſzy ſześciogran położony przy G, i odciągnąwſzy od danego; nic nie zoſtaje, azatém ściana = 225.

Przeſtroga. Drugi ten ſpoſób wyciągania ściany ſześciogrannéy, acz zda ſię być od 1wſzego nieco łatwieyſzy, w rzeczy ſaméy ieſt zamatwany i bez wiadomości 1go nie może jaśnie być okazany, dotego równie albo i bardziéy zatrudniający robieniem pokilkokrotnie ſześciogranów, przeto tamtego raczéy trzymać ſię radzę, którego niezawodność zaraz ſię okaże.

Okazanie danych Przepisów.

Przepiſy te zaſadzają ſię na wewnętrznym ſześciogranów ſkładzie, który formuła ogólna: $a + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$ wyraża, iako ieſt oczywiſta. Wyciągać albowiem 1wſzym zwłaſzcza ſpoſobem ścianę ſześciogranną nie innego nie ieſt, tylko odkrywać (ſpoſobem dzielenia wyciąganiu ścian czworogrannych podobnym) każdą

żdą zoſobna część dany ſześciogran ſkładającą, i z niéy każdego zoſobna terminu dochodzić ściennego. Co we wſzyſtkich danych przykładach na oko ſię pokazało. Ale weźmy ieſzcze ieden ſześciogran i przyſtoſuymy wyciąganie z niego ściany do wewnętrznego jego ſkładu w § XII. odkrytego.

Skład Sześciogranu.		*Wyciąg: ściany.*	*Sciana.*
	11,390,625.	(11,390,625)	225.
I. $a^3 =$	8 000 000.	A.	8
		B.	33,90
		C.	12
$+ 3a^2b =$	2400000.	D.	24
$+ 3ab^2 =$	240000.	E.	24
$+ b^3 =$	8000.	F.	8
		G.	2648
		H.	7426,25
		I.	1352
II. $3a^2b =$	726000.		
$+ 3ab^2 =$	16500.	K.	7260
$+ b^3 =$	125.	L.	1650
		M.	125
Sum: =	11,390,625	N.	742625

I. Wyciągając ścianę z danego ſześciogranu, brałem 1 wizą przedziałkę i przychyla-

jący

jący się do liczby 11 sześciogran 8 znalazłszy w tabliczce, ścianę jego 2 za 1wszy termin ścienny położyłem. Lecz coż to iest ten sześciogran, ieżli nie 1wsza część danego sześciogranu przez a^3 wyrażona?

II. Odciągnąwszy 8 od 1wszéy przedziałki, do reszty przy B położonéy przydałem 2gą przedziałkę 390, w któréy że się mieszczą części przez $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ wyrażone, podzieliłem liczby w niéy kréską odcięte przez $3a^2$ czyli przez troisty czworogran terminu 1go ściany znalezionéy, który iest przy C, i znalazłem 2gi termin ścienny 2; potém tenże troisty czworogran terminu 1wszego rozmnożony przez termin 2gi to iest: 24 tak napisałem pod resztą 1wszéy przedziałki i pod 2gą przedziałką przy D, żeby ostatnia iego figura 4 przypadła pod 1wszą figurę przedziałki 2giéy, a pod 2gą ostatnia figura czworogranu terminu 2go ściennego rozmnożonego przez troisty termin 1wszy, pod 3cią zaś sześciogran tegoż 2go terminu, lecz czyż części dany sześciogran składające wyrażone przez $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nie też same ią i nie tak przypadaią? wszak i tam 4 pod 3, drugie 4 pod 9, 8 pod 0 tak, iako przy D, E i F.

III. Części te w iednę summę zebrane przy G i od liczby B odciągnione zostawuią resztę H, do któréy 3cią przyłączyłem przedziałkę, a wiedząc: że w téy reście i przyłączonéy przedziałce mieszczą się drugie części danego

ſześciogranu przez II. $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ wyrażone, wziąłem dwa 1wſze terminy ścienne już znalezione za ieden to ieſt 22, i zrobiwſzy z nich $3a^2$ to ieſt troiſty czworogran, podzieliłem przez niego liczby H kréſką odcięte i znalazłem 3ci termin ścienny $=5$. Maiąc zaś wſzyſtkie 3 terminy ścienne uważałem: czy troiſty czworogran dwóch za ieden wziętych terminów ściennych rozmnożony przez termin 3ci wzięty za 2gi, i tego znowu czworogran rozmnożony przez tróykę tamtych, nareście ſześciogran terminu oſtatniego, czy, mówię, w reście 2giéy i całéy 3ciéy przedziałce mieſzczą ſię, przeto te 3 produkta tak napiſałem: że 1wſzego oſtatnia figura pod 1wſzą przedziałki 3ciéy padła, 2go pod 2gą, 3go pod 3cią; aże i wſkładzie danego ſześciograna części 2gie przez $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ wyrażone takież ſą i tak rozłożone, iż zupełnie tym trzem produktom odpowiadaią, iako każdy widzi, więc wyciąganie ściany ſześciogrannéy zaſadza ſię na wewnętrznym ſkładzie danych ſześciogranów, azatém zawodne bydź wcale nie może. C. B. D. O.

Przeſtroga. Gdyby z danego ſześciogranu po odciągnieniu oſtatniém reſzta iaka zoſtała, znakbyto był: iż dana liczba ſześciogranna nie ieſt doſkonałym ſześciogranem, azatém ściana jego ciągnąć ſię może przez przybliżenie (*per approximationem*) tym ſamym ſpoſobem, który w Przeſtrodze I. pod § XI. opiſany z tą różnicą: że tam parami, a tu

tróy-

tróykami cyfry do frakcyi przydają ſię, i tam przepiſy dane na wyciąganie ściany czworograńnéy, a tu dane na wyciąganie ściany ſześciograńnéy zachowują ſię. Przykład następujący może być wzorem takiego ścian wyciągania.

Sześciog: niedoſkonały. *Sciana przybliżająca ſię.*

(9,471) $21 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$

8

1 471

1 2

1 2

6

1

1261

A. 2 1 00,00

B. 1,000

C. 1 3 2 3

D. 1 3 2 3

6 3

1

1 3 2 9 3 1

E. 7 7 0 6 9000

F. 1 0 0 0000

 W tym

W tym przykładzie po wyciągnieniu dwóch terminów ściennych 21 pozostała reszta A obrócona na frakcyą i trzy tak do licznika A, iako do mianownika B cyfry przydane. Przy C troiaki czworogran terminu 1 wszego (obydwa wyciągnione za ieden biorąc) iest dzielnikiem licznika A, po którego podzeleniu wieloraz 1 pisze się za licznika frakcyi nowy termin ścienny wyrażającéy, a za mianownika pisze się ściana z mianownika B wyciągniona $=10$. Po niżéy D kładą się trzy produkta z 3 terminów ściennych 211, przyłączając licznika frakcyi $\frac{1}{10}$ do terminów całkowitych, a summa ich od liczby A odciąga się. Reszta E znowu na frakcyą się obraca inne trzy cyfry tak do licznika E, iako do przeszłego mianownika B przy F położonego przydawszy; a tak znowu z mianownika F wyciągniona ściana $=100$ za nowéy frakcyi mianownika kładzie się, a licznik iéy 5 z liczby E wyciąga się podług przepisów danych *i t. d.*

§ XIV. *Z danéy liczby iakiegokolwiek byteż naywyższego stopnia wyciągnąć ścianę.*

Poprzedzające o wyciąganiu ścian czworogrannych mającemu wiadomości bez trudności przyydzie wyciąganie ścian wyższostopniowych. Trzeba I. w danym iakimkolwiek stopniu porobić przedziałki tyle figur zawieraiace, ile wykładnik danego stopnia ma w sobie iedności, to iest: ieżeli wykładnik iest 4 lub 5, prze-

przedziałki mieć powinny figur 4 lub 5 *i t. a.* II. Z tabliczki pod § X. położonéy wziąć ściánę ſtopnia w 1wſzéy przedziałce zawartego, albo iemu naybliżſzego, i tę ścianę za 1wſzy termin ścienny położyć, a iéy ſtopień z tabliczki wzięty od przedziałki 1wſzéy odciągnąć. III. Pierwſzy termin ścienny wynaleziony wynieść do ſtopnia iednością mnieyſzego od ſtopnia danego *np:* do 4tego ſtopnia, gdy ściana ma być pięcioſtopniowa, i nowy ten ſtopień rozmnożyć przez wykładnika ściany *np:* przez 5, ieżeli ściana ieſt 5ta, produkt ten będzie dzielnikiem reſzty przedziałki 1wſzéy, ieżeli iaka zoſtała, i 1wſzéy figury kréſką odciętéy przedziałki 2giéy. IV. Wziąć formułę tegoż ſtopnia, którego ſię wyciąga ściana, zrobioną z ściany dwukrotnéy $a+b$ *np:* ieżeli ściana wyciąga ſię pięcioſtopniowa, wynieść trzeba $a+b$ do 5go ſtopnia, będzie: $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Potém za 1wſzy termin ścienny znaleziony założyć a, za wieloraz zaś, który ma być 2gim terminem ściennym, założyć b, azatém do którego ſtopnia wynieſione ieſt a lub b w każdym terminie rzeczonéy formuły, do tego wynosić i 1wſzy termin ścienny i wieloraz z podzielenia reſzty 1wſzéy wypadły; toż obydwa te ſtopnie przez nich ſamych mnożyć tak; iak w formule a i b ſą rozmnożone, *np:* ieżeli w formule ieſt $5a^4b$, więc 1wſzy termin ścienny wynióſſzy do 4tego stopnia, rozmnożyć trzeba i przez wieloraz

raz i przez wſpółczynnika 5 *i t. d.* V. Podług téy więc formuły i każdego zoſobna terminu jéy ſzukać produktów 1wſzych dwóch terminów ściennych, a wynalezione tak iedne pod drugiemi podpiſywać, iako ſię piſzą, wyciągając ścianę ſześciogranną to ieſt: żeby przedoſtatnia figura produktu 2go była pod oſtatnią figurą produktu 1wſzego i tak zawſze, żeby dzieſiątki produktów niżſzych były pod jednościami wyżſzych, które to produkta w iednę ſummę zebrane odciągnąć od reſzty przedziałki 1wſzéy i 2giéy całéy. Gdyby zaś ſumma owa odciążna od liczby, od któréy ma być odciągniona, była więkſza, znakby pewny był: że wieloraz za 2gi ścienny termin wypadły więkſzy był wzięty, niż należało, azatém trzeba go iednością póty zmnieyſzać, póki nanowo robione podług formuły produkta i razem dodane nie uczynią mnieyſzéy ſummy nad liczbę do odciągnienia daną, albo iéy równéy. VI. Do reſzty z 2giéy przedziałki pozoſtałéy przyłączywſzy przedziałkę 3cią i 1wſzą iéy z lewéy ręki figurę odciąwſzy, dzielić, iak przedtém, przez ſtopień ściany wyciągnionéy (biorąc obydwa jéy terminy wyciągnione za ieden) mnieyſzy iednością od wykładnika ſtopnia danego, a przez tego ſamego wykładnika rozmnożony, formuły używając, iak piérwéy. VII. Jeżeli dzielnik w podzielnéy liczbie ani razu nie mieści ſię, za wieloraz albo nowy termin ścienny piſze ſię o, a do prze-

działki podzielnéy następująca ſię ſpuſzcza, do dzielnika zaś tyle ſię cyfer przydaje, ilu ſtopniów wyciąga ſię ściana zmnieyſzona ie-dnością, *np:* ieżeli ściana ieſt 5, do dzielnika przydaje ſię cyfer 4. Niech będzie przykładem takiego wyciągania.

Liczba Pięcioſtopniowa. *Sciana.*

$\sqrt[5]{(65,06608,08696,90625)}$ 2305.

B.	$a^5 =$	32
C.		330,6608,
D.	$5a^4 =$	80
E.	$5a^4b =$	240
	$10a^3b^2 =$	720
	$10a^2b^3 =$	1080
	$5ab^4 =$	810
	$b^5 =$	243
F.		3236343
H.		70265086969,0625
I.	$5a^4 =$	13992050000
K.	$5a^4b =$	69960 250000
	$10a^3b^2 =$	3041750000
	$10a^2b^3 =$	66125000
	$5ab^4 =$	718750
	$b^5 =$	3125
L.		702650869690625.

Przy

Przy Literze B iest 5ty ſtopień z tabliczki wzięty, którego ściana 2 przez Przepis II. iest 1wſzym terminem ściany ogólnéy. Przy C iest reſzta po odciągnieniu tegoż 5-tego ſtopnia od 1wſzéy przedziałki z przyłączoną 2gą całą. Przy D jeſt 1wſzy termin ścienny do ſtopnia iednością mnieyſzego od danego wyniesiony i rozmnożony przez wykładnika ściany to ieſt przez 5, a przez ten produkt podzielona wzmiankowana reſzta 1wſzéy i 1wſza figura 2giéy przedziałki daje wieloraz za 2gi termin ścienny = 3. Przy E ſą produkta w Przep: V. opiſane wypadłe z piérwſzych dwóch terminów ściennych podług formuły tak iedne pod drugiemi podpiſane, że produktów niżſzych dzieſiątki padły pod iednościami produktów wyżſzych *i t. d.* Przy F ieſt ſumma tychże produktów, która odciągniona od C zoſtawiła reſztę położoną przy H, do któréy nie tylko 3cia, ale i 4ta przyłączona przedziałka z przyczyny, o któréy ſię zaraz powié. Przy I ſą piérwſze 2 terminy scienne za ieden wzięte wynieſione do ſtopnia mnieyſzego iednością od danego ſtopnia i rozmnożone przez danego wykładnika, a te ſą dzielnikiem liczby H przez Przep: VI. Ale że ten dzielnik ani razu w liczbie podzielnéy nie mieści ſię, przeto za wieloraz czyli za 3ci termin ścienny napiſana ieſt o przez Przep: VII. a do rzeczonego dzielnika przydane ſą 4 cyfry, przeto też do liczby podzielnéy przedziałka oſtatnia przyłączona.

Przy K

Przy K ſą produkta podobne położonym przy E tak wyſzukane i napiſane iak tamte, z tą iednak różnicą: że tu 3 i wſze terminy ścienne brane ſą za ieden, a 4ty za 2gi. Przy L ieſt ſumma tych produktów, po któréy odciągnieniu od liczby H nic nie zoſtaje, azatém ściana wyciąniona = 2305.

Przeſtroga. Gdyby dany w liczbach 4ty lub 5ty ſtopień był niedoſkonały ściana jego mogłaby ſię ciągnąć przez przybliżanie czyli przez terminy nieſkończone za pomocą formuły, obróciwſzy reſztę po oſtatniém odciągnieniu pozoſtałą na frakcyą i przydawſzy cyfer tyle, ile wykładnik danego ſtopnia ma w ſobie iedności *i t. d.*

ROZDZIAŁ IV.

O Pomiarach składanych w ogólności.

§ XV. *Wykład potrzebnieyſzych wyrazów.*

I. POmiary ſkładanemi nazywają ſię te, w których niewiadome ilkości ſą czworogranne, ſześciogranne, to ieſt: do 2go, 3go albo do wyżſzego ieſzcze ſtopnia wynieſione; i tak pomiar: $x^2 = ab$ ieſt czworogranny, bo ilkość w nim niewiadoma x^2 wynieſiona ieſt do 2go ſtopnia; pomiar zaś $x^3 = a$ ieſt ſześciogranny, bo ilkość x^3 ieſt trzecioſtopniowa *i t.d.*

II. Składane pomiary bywają i wtenczas, kiedy ilkości niewiadome do nieokréślonego ſto-

ſtopnia wyrażonego literą m lub n ſą wynieſione, tak pomiar : $x^n = ab$ ieſt ſkładany lecz nieokréślony, który ſię okréśli, gdy ſię wykładnikowi ſzczególna iaka cena naznaczy. Będzie zatém x^n albo czworogranem, ieśli będzie $n = 2$, albo ſześciogranem, ieśli $n = 3$. *i t.d.*

III. Pomiar ſkładany dwojaki być może to ieſt albo czyſty czyli ſam przez ſię, *æquatio pura*, albo przymięſzkowy, *affecta*. Czyſty ieſt, kiedy w nim albo iedna tylko ilkość niewiadoma wyżſzoſtopniowa ieſt albo kilka, ale wſzyſtkie do iednegoż ſtopnia ſą wynieſione; takie ſą pomiary I. $x^3 = bd$. II. $x^2 - p^2 = bd$. Przymieſzkowy zaś ieſt, kiedy do iednego ſtopnia ilkości niewiadoméy przyłączone ſą inne ſtopnie téyże ilkości, *np:* $x^2 + ax = ab$, gdzie x w 1wſzym terminie ieſt drugoſtopniowe, a w 2gim piérwſzoſtopniowe *i t. d.*

IV. Sciana pomiaru ſkładanego ieſt cena ilkości niewiadoméy zredukowanéy do 1go ſtopnia *np:* ściana pomiaru : $x^2 = a$ będzie cena ilkości x^2, gdy z niéy tudzież z a wyciągniona będzie ściana czworogranna, to ieſt będzie: $x = \sqrt{a}$. Tyle bowiem ważyć będzie $\sqrt{a}$, ile x. Ta zaś może być dodatna, albo odciążna. Dodatna bywa, kiedy wyraźny lub domniemany znak + ma przed ſobą, i nazywa ſię ścianą rzetelną, *radix vera*, odciążna zaś, kiedy wyraźnie położony przed ſobą ma znak —, i nazywa ſię ścianą nierzetelną czyli fałſzywą; *radix falſa*; obydwie atoli przerzeczone ściany

ſą

ſą rzeczywiſte. Bo gdy *np:* winenem komu Cz: Zł: 50, a nie mam ich zkąd oddać, mogę mówić: iż mam —50 czyli długi rzeczywiſty. Obie iednak te ściany z pomiaru czworogrannego wyciągnąć ſię mogą, o czém obſzérniéy potém.

V. Kiedy cena niewiadoméy ilkości ieſt czworogranem odciążnym *np:* $x = \sqrt{-a^2}$, natenczas cena ta czyli ściana, o któréy wyciągnienie z takiego czworogranu idzie, nazywa ſię ścianą imiginaryyną czyli niepodobną, *radix imaginaria*, *impoſſibilis*, gdyż czworogran $-a^2$ wypaść nie może ani z $+a \times +a$, ani z $-a \times -a$, iako przez ſię oczywiſta i z przepiſów na mnożenie ilkości w Części I. Rozdz: I. danych każdemu wiadoma; azatém wyciągnąć z niego ścianę czworogranną, rzecz bardziéy niepodobna, niż cyrkuł zamienić w czworogran. Pamięć na ten punkt potrzebna będzie w Rezolwowaniu Zagadnień 2go ſtopnia, gdzie iednak ſzczególna na to uwaga dana będzie; tymczaſem ogólne ſpoſoby redukowania pomiarów ſkładanych krótko ſię przełożą.

§ XVI. *Jakim porządkiem układać terminy pomiaru ſkładanego?*

I. Terminy ilkość niewiadomą bądź ſamotną, bądź rozmnożoną przez inną wiadomą w ſobie zamykające trzeba w iednéy pomiaru części mieścić tak, żeby na 1 wſzém

mieyſcu

mieyſcu była ta, która do wyżſzego nad inne ieſt ſtopnia wynieſiona, i ta ſię nazywa 1wſzym pomiaru terminem, na drugiém zaś mieyſcu niewiadoma iednym ſtopniem od 1wſzéy niżſza, a ta będzie 2gim terminem *i t d.* W 2giéy zaś pomiaru części kładą ſię terminy z ſamych wiadomych ilkości złożone, które, gdyby były z wykładnikami, tym ſamym porządkiem, co w pierwſzéy części układać ſię powinny. Niech będzie pomiar dany: $3b^2x + 3bx^2 - d = f - x^3$, porządnie ułożony będzie: $x^3 + 3bx^2 + 3b^2x = d + f$.

II. Jeżeli termin naywyżſzego ſtopnia ieſt odciążny to ieſt ze znakiem —, powinien ſię obrócić na dodatny, przenoſząc go do innéy tegoż pomiaru części, inaczéy ściana zwłaſzcza czworogranna byłaby niepodobna przez Wykład V, *np*: $ax - x^2 = ab - f$, przenoſząc $-x^2$ owſzem i ax do 2giéy części, a terminy części 2giéy do 1wſzéy, będzie: $f - ab = x^2 - ax$. Czaſem wſzyſtkie terminy obydwóch części pomiaru w iednéy ſię kładą i równają z 0, co ſię niżéy często czynić będzie dla łatwieyſzéy redukcyi pomiarów, tak *np*: pomiar poprzedzający piſać ſię może: $a^2 - ax - f + ab = 0$.

III. Wſzyſtkie terminy, w których niewiadoma ilkość w iednymże ſtopniu ieſt, ieden pod 2gim tak właśnie, iak w dodawaniu piſać ſię zwykły, co ſię i z wiadomemi czyni, kiedy ich kilka będzie, *np*: $x^3 + ax^2 - bx^2 + cx - bx = ab.$

ab. Piſząc terminy iednoſtopniowe ieden pod 2gim będzie :

$$\begin{matrix} x^3 + ax^2 - bx & \\ & = ab. \\ - bx^2 + cx & \end{matrix}$$

A takie ilkości i tak napiſane za iedenże termin brać ſię zwykły.

IV. Kiedy w ſkładanym pomierze brakuje terminu iakiego, brak ten wyraża ſię gwiazdeczką, *np*: w pomierze: $x^4 \ * \ - cx^2 \ * \ + a^2b = 0$, gdzie brakuje 2go i 4tego terminu, przez ten atoli brak nie pſuje ſię bynaymniéy porządek terminów, gdyż $-cx^2$ trzyma 3cie ſwoje mieyſce i $+ a^2b$ ſwoje 5te, choć śrzodkujących nie doſtaje; owſzem ani równości między częściami pomiaru taki brak nie ſzkodzi, gdyż mimo wyciąganie ścian ſą ſpoſoby, przez które zredukować ſię taki pomiar może i zagadnienie rozwiązać, o czém niżéy.

§ XVII. *Jakie ſą powſzechnieyſze ſpoſoby redukowania pomiarów ſkładanych.*

I. Gdy wſpółczynnik terminu 1go w pomierze porządnie ułożonym zamyka ſię raz lub kilka razy ſpełna w wſpółczynnikach innych terminów, natenczas wſzyſtkie wſpółczynniki liczbami lub literami wyrażone podzieliwſzy przez wſpółczynnika 1go terminu, ſkładany pomiar zamieni ſię w proſtſzy, *np*: $3x^2 + 6ax = ab$, podzieliwſzy przez 3 wſpółczynników innych terminów, będzie: $x^2 + 2ax = \frac{1}{3}ab$.

Tak-

Także: $ax^2 - 2ax = abc$ przez a podzieliwszy cały pomiar, wypadnie: $x^2 - 2x = bc$. Podobnie: $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 4ab$, podzieliwszy przez 4, wyydzie: $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = ab$ *i t. d.*

II. Trafiają się pomiary składane z wykładnikami wyższostopniowemi trzy tylko częstokroć terminy mające, z których iwszy do 4tego lub 6stego, a czasem i wyższego jeszcze stopnia wyniesiony bywa; którego wykładnik z wykładnikami innych terminów bywa w proporcyi Arytmetyczney, iak 4: 2, albo 6: 3. Weyrzawszy na takie pomiary, zdadzą się być 4tostopniowemi, lub sześciostopniowemi, w rzeczy samey nie są tylko czworogrannemi, nazywają się zaś pomiarami naciąganemi 2go stopnia, *æquationes derivatæ 2di gradûs*, i bardzo łatwo zamieniają się w czworogranne, założywszy w czwartostopniowym rzeczonym pomierze z za x^2, a w sześciostopniowym toż z za x^3. I tak w pomierze: $x^4 - 8x^2 - 4 = 0$, założywszy z za x^2, będzie pomiar czworogranny: $z^2 - 8z - 4 = 0$; w pomierze zaś: $x^6 - 2ax^3 + 8b^3 = 0$ założywszy z za x^3, wypadnie także czworogranny pomiar: $z^2 - 2az + 8b^3 = 0$; których redukcya dalsza uczyni się przez następujący §. Obacz Rezolucyą Zagadnienia 5tego między przykładami pomiarów sześciogrannych.

III. Trafiają się także pomiary składane z znakiem ściennym wyraźnego lub domnie-

mane-

manego wykładnika ściany swoiéy w sobie zawierającym. Znak ten ieśli w iednéy tylko części pomiaru znayduje się, łatwo się zgubi, mażąc go w téy części, w któréy iest, a 2gą część wynosząc do stopnia wyrażonego przez tenże znak zmazany. Tak *np*: pomiar ten $\sqrt{a + x} = 2b$, mażąc $\sqrt{}$, i 2b wynosząc do 2go stopnia, obróci się w prostszy i będzie: $a + x = 4b^2$. Tak i $\sqrt[3]{a + x} = 2b$ będzie: $a + x = 8b^3$. *i t. d.* Znak bowiem ścienny pokazuje: że z ilkości pod nim położonéy ma się wyciągnąć ściana przez wykładnika iego wyrażona, więc ilkość ta w rzeczy saméy powinna być wyższostopniowa to iest: czworogranna lub sześciogranna; więc zostawiwszy ią bez znaku, nie przestanie być tymże samym stopniem, azatém wyniósszy 2gą ilkość iéy równą do iednegoż z nią stopnia, równość się między niemi nie psuje, atymczasem składany pomiar obróci się w prostszy.

IV. Kiedy z warunków zagadnienia iakiego wypadnie kilka pomiarów składanych, zredukować ie można do iednego przez założenie ceny ilkości niewiadoméy w iednym pomierze wziętéy za tęż samą ilkość położoną w 2gim, lub przez składanie w ieden pomiar cen obydwóch. W czém żadnéy trudności dla tych nie masz, którzy mają w pamięci to, co się o redukcyi podobnych pomiarów prostych przełożyło w Części Iwszéy na karcie 121 i następu-

ſtępujących. Obacz Zagadnienia 2. i 4. niżéy między przykładami pomiarów ſześciogrannych.

V. Wſzelki pomiar ſkładany, który tylko można zredukować czyli na proſtſzy obrócić, albo ieſt podzielny bez reſzty przez inny iaki, który dzielnikiem albo miarą iego nazwać ſię może, albo nie ieſt tak podzielny. Jeśli nie ieſt, trzeba przyſtąpić do ſzczególnych ſpoſobów redukowania go, które w naſtępujących Rozdziałach będą wyłuſzczone. Zaſtanowić ſię iednak wprzód i roztrząſnąć dobrze należy: czy nie ieſt tak, iak ſię rzekło, podzielny, uważając naybardziéy wykładnika ściany, który wyraża: z ilu pomiarów proſtych przez ſiebie rozmnożonych tenże ſkładany pomiar wypadł, przez które mógł ybyć podzielony. Tak *np:* pomiar 3cioſtopniowy, którego wykładnik 3, nie może wypaść tylko z rozmnożenia albo 3 pomiarów proſtych przez ſiebie ſamych, albo dwóch iednego proſtego, 2go czworogrannego, azatém przez te tylko może być podzielony, bo i wykładnik iego 3 nie może ſię dzielić tylko na 1,1,1, albo na 1 i 2; toż ſa n o n a ſię rozumieć i o 4tym ſtopniu; którego wykładnik 4 ieſt podzielny I. na 1,1,1,1, II. na 1, 1, 2, III. na 1, 3, IV. na 2, 2, *i t. d.* Szukając już dzielnika, od nayproſtſzego zaczynać naturalny porządek każe, to ieſt: ſzukać naprzod pomiaru piérwſzoſtopniowego, przez któryby podzielony mógł być bez reſzty wyżſzoſtopniowy

dany, a znalazłszy taki i podział rzeczony uczyniwszy, szukać innego także pierwszostopniowego, przez któryby sam wieloraz z 1wszego podziału wypadły mógł być podobnie podzielony *i t.d.* aż za wieloraz wypadnie pomiar wcale prosty. Jeżeli zaś dany pomiar wyższostopniowy albo wieloraz z podziału 1wszego wypadły nie może się podzielić przez żaden pomiar prosty, natenczas uważać potrzeba: czy tenże pomiar lub wieloraz nie podzieli się przez pomiar iaki drugostopniowy, lub ieśli dany ieszcze wyższy iest, przez trzeciostopniowy *i t. d.* nie siągając iednak póty wyższych, póki podział przez niższe nie będzie sprobowany. Wynalezienie takich dzielników co do pomiarów czworograniych i sześciogranych bardzo łatwe. Niech będzie *np:* pomiar: $x^3 - 9x^2 + 22x - 8 = 0$, szukam wszystkich dzielników ostatniego terminu — 8, będą: 1, 2, 4, 8; robię z nich pomiary proste I. $x - 1 = 0$, II. $x - 2 = 0$, III. $x - 4 = 0$, IV. $x - 8 = 0$. Dzielę dany pomiar przez 1wszy, ale z tego podziału zostaje reszta, dzielę przez 2gi, ale i ten podział nie iest bez reszty; więc podzieliwszy przez 3ci, wypadnie za wieloraz pomiar od danego niższy to iest: $x^2 - 5x + 2 = 0$ *i t. d.* Lecz co się tycze dzielników wyższostopniowych, tych wynalezienie nieco trudnieysze, o którém namieni się cokolwiek w Rozdziale ostatnim téy Części. Dokładnieysze tego wyłuszczenie iest u X. Reynau. (*)

(*) Analyse demonstrée tom: 1. livr: IV. pag: 133.

ROZDZIAŁ V.

O Pomiarach czworogrannych.

NAmieniło ſię w § XV. p. II. że pomiary ſkładane mogą być tak, iako i proſte albo określone, albo nieokreślone. O pomiarach ſkładanych nieokreślonych nie maſz tu co mówić, chyba to iedno: że ilkość nieokreślona w redukcyach rzeczonych pomiarów tak powinna być uważana, iak gdyby była określona, á po oſtatniéy pomiaru redukcyi ma ſię określić czyli na liczbę zgodną z warunkami zagadnienia obrócić, iako ſię oſtrżegło w Rozdżiale IV. Części I.

Około określonych więc pomiarów i zagadnień, zacząwſzy od czworogrannych, cała naſza w tym i naſtępujących Rozdziałach będzie zabawa.

§ XVIII. *Przepiſy na rezolwowanie Problematów czworogrannych.*

Prócz powſzechnych Przepiſów danych tak w 1wſzéy Części Rozdziale 2gim na rezolwowanie Problematów proſtych, iako i w téy 2giéy w § poprzedzającym, trzeba nadto mieć przed oczyma i zachować naſtępujące:

Przepis 1. Przez wzmiankowane Przepiſy tak trzeba zredukować pomiar czworogranny, żeby w iednéy iego części albo czworogran tylko ilkości niewiadoméy przez żadną

inną ilkość lub liczbę ani rozmnożony ani podzielony został, albo ieżli zostaną inne ieszcze terminy, żeby zawierały w sobie ilkość niewiadomą tęż samą, która iest w terminie 1wszym, ale prostą czyli do 2go stopnia nie wyniesioną, w 2giéy zaś pomiaru części żeby się same wiadome ilkości bez przymieszki niewiadomych mieściły. Przeto gdyby z warunków iakiego zagadnienia wypadło kilka pomiarów dla kilku niewiadomych ilkości, wszystkie te pomiary zredukować potrzeba do iednego (przez § XVII. p. IV.) w którymby iedna tylko niewiadoma została. Redukcya zaś dalsza na tém ma stanąć, żeby czworogran ilkości niewiadoméy z redukcyi wypadły i w iednéyże części pomiaru umieszczony był dodatny równie iako i czworogran ilkości wiadoméy w 2giéy części; gdyż żaden czworogran nie może być odciążny przez p. V. § XV.

Przepis 2. Mając tak zredukowany pomiar, ieżeli w iednéy iego części nic więcéy nie znayduje się prócz czworogranu ilkości niewiadoméy, czyli ieżli pomiar iest czysty; łatwa będzie dalsza iego redukcya. Niczego bowiem nie braknie, tylko ścianę czworogranną wyciągnąć, która z 1wszéy naprzód części rzeczywiście wyciąga się przez § V, w 2giéy zaś części, gdzie same są ilkości wiadome, wyciąganie ściany tymczasem wyrazi się zwyczaynym znakiem ściennym.

Przepis 3. Kiedy zaś w iednéyże części pomiaru czworogran ilkości niewiadoméy ma

przyłączone inne terminy zamykające w sobie też samą ale prostą czyli piérwszostopniową ilkość, czyli kiedy pomiar iest przymieszkowy (§ XV. Wykł: III) wtenczas pomiar bywa niezupełny maiący wprawdzie czworogran 1wszego terminu ściennego i dwóykę tegoż terminu rozmnożoną przez termin 2gi, ale nie maiący czworogranu terminu 2go ściany swoiéy, azatém wtenczas czworogran ilkości niewiadoméy bierze się za termin 1wszy pomiaru, inne zaś przyłączone terminy zawieraiące w sobie ilkość też samą niewiadomą ale prostą biorą się za 2gi termin, a 3ciego szukać trzeba, *np:* wpomierze $x^2 - 3ax - ax = 2b - 4a^2$ za 1wszy termin bierze się x^2, za 2gi zaś $-3ax - ax$, czyli $-4ax$, a trzeciego tu brakuje to iest: czworogranu terminu 2go ściennego. Przeto poszukać go potrzeba, i dopełnić nim takiego pomiaru, żeby można było wyciągnąć z niego ścianę czworogranną. Nim zaś to dopełnienie nastąpi, potrzeba *naprzód:* wyciągnąć ścianę z terminu 1wszego, iaki iest w danym przykładzie x^2, którego ściana x będzie 1wszym terminem ściany dwukrótnéy, *powtóre:* przez dwóykę tegoż terminu to iest przez $2x$ podzielić 2gi danego czworogranu termin to iest $-4ax$, wieloraz ztąd wypadły $-2a$ będzie 2gim terminem ściennym, którego czworogran $4a^2$, i całą ścianę wyciągnioną $x - 2a$ zanotować.

Przepis 4. Uważać trzeba ieżeli czworogran,

gran, którego brakuje, terminu 2go nie znayduje się w 2giéy pomiaru części z samych wiadomych ilkości złożonéy. Jeżeli nie, postąpić należy podług Przepisu 5. niżéy położonego. Jeżeli zaś znayduje się, uważać: z iakim tam iest znakiem, odciążnym, czy dodatnym. I. Jeżli tam iest z znakiem odciążnym, przenieść go ztamtąd potrzeba z przeciwnym znakiem do téy części, która ma w sobie ilkości niewiadome, a tym sposobem pomiar będzie dopełniony, i w 1wszéy części swojéy mieć będzie doskonały czworogran, którego ściana dwukrotna przez Przepis 3ci już iest wyciągniona. Albowiem prócz czworogranu terminu 1wszego téy ściany i dwóyki terminu 1wszego rozmnożonéy przez termin 2gi będzie nadto w téyże części pomiaru czworogran 2go terminu ściennego. Czego do zupełności pomiaru trzeba było. Tak w przykładzie wyżéy danym czyli w pomierze: $x^2 - 4ax = 2b - 4a^2$, którego ściana $= x - 2a$, czworogran 2go téyże ściany terminu $4a^2$ znayduje się z znakiem odciążnym w 2giéy części, ten więc sam przeniesiony z przeciwnym znakiem do 1wszéy dopełni pomiaru i będzie: $x^2 - 4ax + 4a^2 = 2b$. Zawierać bowiem będzie w 1wszéy części swoiéy czworogran 1wszego terminu ściennego x^2 i dwóykę tegoż terminu rozmnożoną przez 2gi $-4ax$ z czworogranem 2go terminu $+ 4a^2$, które to części razem wzięte składają zupełny czworogran ściany dwukrotnéy przez §

X.

X. Wyciągnąwszy więc tę ścianę z 1wszéy dopełnionego pomiaru części przez § VI, a w 2giéy wyciągnienie znakiem tymczasem ściennym wyraziwszy, będzie pomiar: $x - 2a = \sqrt{2b}$; przeniósszy nakoniec $- 2a$ do części 2giéy, będzie: $x = \sqrt{2b} + 2a$ pomiar zredukowany do iednéy ilkości niewiadoméy, iako iest oczywista, z którego 2giéy części obróconéy na liczby wyciągnąwszy także ścianę czworogranną przez § XI. Zagadnienie będzie usatwione. II. Jeżeli zaś czworogran 2go terminu ściennego znayduje się w 2giéy pomiaru części z znakiem dodatnym, nie można go żadną miarą przenosić do 1wszéy części, i brać za 3ci termin czworogranu maiącego ścianę dwukrótną z przyczyny namienionéy w § XV. p. V. gdyż taki czworogran iest fałszywy i niepodobny z natury samego mnożenia., z którego bierze swóy początek, trzeba więc w tym razie nowozrobionym 2go terminu ściennego czworogranem dopełnić danego pomiaru podług Przepisu następuiącego.

Przepis 5. Jeżeli czworogran terminu 2go ściany dwukrótnéy nie znayduje się z odciążnym znakiem w 2giéy pomiaru części z samych wiadomych ilkości złożonéy, trzeba go zrobić i do obydwóch części przydać, którym przydatkiem równość między niemi bynaymniéy się nie zepsuje, gdyż się taż sama ilkość do równych przyda. Robi się zaś czworogran rze-

czo-

czony z połowy wſpółczynnika terminu 2go ilkości niewiadoméy, czego przyczyna ieſt w ſamym ſkładzie każdego czworogranu, którą każdy łatwo poſtrzeże. Daymy *np:* pomiar czworogranny z Zagadnienia iakiego warunków wypadły : $x^2 \pm 2ax = b$. Biorąc przez Przep: 3ci za termin 1wſzy x^2, za 2gi zaś $\pm 2ax$, i wyciągając ścianę z x^2, będzie 1wſzym terminem x, przez którego dwóykę to ieſt przez $2x$ gdy ſię podzieli termin 2gi $\pm 2ax$, wieloraz $\pm a$ będzie 2gim terminem ściennym, azatém cała ściana $= x \pm a$; ale że czworgranu tegoż 2go terminu ściennego nie maſz w 2giéy części, trzeba go więc zrobić z połowy wſpołczynnika termimu 2go $\pm 2ax$, będzie taką połową: $\frac{2a}{2} = a$, czworogran zaś z niéy będzie : $a \times a = a^2$, który przydawſzy do obydwóch pomiaru części, będzie : $x^2 \pm 2ax \pm a^2 = b \pm a^2$ pomiar zupełny czyli zawierający w piérwſzéy części ſwéy doſkonały czworogran ściany dwukrotnéy $x \pm a$, która przez Przepis 4. już wyciągniona, azatém pomiar zamieni ſię w ten : $x \pm a = \sqrt{b \pm a^2}$; przenióſſzy zaś $\pm a$ do 2giéy części, będzie: $x = \sqrt{b \pm a^2} - a$ *i t.d.*

Przepis 6ſty i oſtatni na rezolwowanie zagadnień nie tylko czworogrannych lecz i wſzelkich innych ſkładanych ieſt tenże ſam, który w 1wſzéy części Rozdz: 2gim dany ieſt na rezolwowanie Problematów proſtych, to ieſt: ażeby zredukowawſzy podług danych Przepi-

sów

sów pomiar do iednéy ilkości niewiadoméy, obrócić litery w 2giéy iego części umieſzczone wyrażające ilkości wiadome na liczby, za które na początku działania były założone, a z liczb podług Przepiſów § XI. ścianę wyciągnąć, ta będzie oſtatnią rezolucyą danego zagadnienia; wreście doświadczyć téy rezolucyi przez roztrząśnienie: czy ſię ſtało zadoſyć warunkom zagadnienia, *np:* w oſtatnim pomieſze: $x = \sqrt{b + a^2} - a$, ieżeli a założone za 5, b za 24, obróciwſzy litery na liczby i dodawſzy pod znakiem ściennym położone, będzie $x = \sqrt{24 + 25} - 5 = \sqrt{49} - 5$; nakoniec wyciągnąwszy ścianę czworogranną z liczby 49, będzie: $x = 7 - 5 = 2$. Gdyby zaś z ilkości niewiadomych na liczby obróconych wyciągnąwſzy ścianę reſzta iaka zoſtała; znakby był: iż liczba owa nie ieſt doſkonale czworogranna, azatém podług Przeſtrogi 1wſzéy § XI. wyciągać, ieżeli ſię podoba, można też ścianę przez terminy nieſkończone czyli przez przybliżanie *i t. d.*

Przeſtroga 1. Żeby zaczynający nie mieli trudności w rozeznawaniu Pomiarów czworogrannych zupełnych od niedopełnionych, niech uważają: I. ieżeli w 1wſzym terminie danego pomiaru ieſt czworogran ilkości niewiadoméy, w 2gim zaś: czy ieſt 1wſzy ſtopień téyże ilkości rozmnożony przez wſpółczynnika liczbą lub literą wyrażonego lub domniemanego, a w 3cim

czwo-

czworogran z połowy tegoż wſpółczynika zrobiony; wtenczas pomiar w części, w którey ſą rzeczone terminy; będzie zupełny; iaki ieſt ten : $x^2 + 2ax + a^2 = b$, w którym oprócz x^2 w 1wſzym terminie, ieſt ieſzcze w 2gim x z wſpołczynnikiem 2a, w 3cim zaś a^2 czworogran z połowy tegoż wſpółczynnika to ieſt z $\frac{2a}{2}$ czyli z a. II. Jezeli zaś nie maſz w pomierze 3go terminu, albo choć ieſt, ieżeli nie ieſt czworogranem zrobionym z połowy wſpółczynnika terminu 2go, pomiar taki ieſt niezupełny i potrzebuje dopełnienia, o ktorém ſię mówiło, taki ieſt : $x^2 + 2ax = b$, taki i ten : $x^2 + 2ax + 3a = b$; w 1wſzym bowiem brakuje wcale 3go terminu, w 2gim choć ieſt ten termin, ale nie ieſt czworogranem, iakiego tu trzeba, azatém obydwóch dopełnić należy. Brak ten, żeby ſię prędzéy dał poznać, wſzyſtkie pomiaru terminy przenoſzą ſię do jednéyże części i równają ſię z o, tak $x^2 + 2ax - b = o$ *i t. d.*

Przeſtroga 2. Uważać pilnie potrzeba : że po oſtaniéy redukcyi pomiarów czworogrannych, azatém po wyciągnieniu już nawet z nich ściany, cena ilkości niewiadoméy w części drugiéy umieſzczona równie być może z znakiem + lub —. I tak zredukowawſzy pomiar: $y^2 - 2by - b^2 = a^2$, i ścianę z niego wyciągnąwſzy, może być albo $y - b = + a$ albo $y - b = - a$, gdyż czworogran, z którego ściana a wyciągniona, dodatny być powi-

nien

nien, czy ſię zrobi z $+a \times +a$, czy $z -a \times -a$ podług przepiſów mnożenia, więc ściana z $+a^2$ wyciągniona równie może być dodatna iak odciążna, więc 2ga część zredukowanego pomiaru może być $\pm a$. Jeżeli weznie ſię za dodatną, przenióſſzy z 1wſzéy do 2giéy częściey $-b$, będzie: $y = b + a$, ieżli za odciążną, będzie $y = b - a$. Te zaś dwie ceny iednéyże ilkości y, ſą bardzo odmienne i ſobie przeciwne. Jakże tedy poznać, że $y = b + a$, a iak, że $y = b - a$? Poznanie tego nie naytrudnieyſze. Przyyść do niego można przez uważne warunków zagadnienia roztrząſanie. Będzieli ilkość y od b większa, pomiar: $y - b = a$ zamykać w ſobie będzie ścianę dodatną, będzieli mnieyſza, ściana iego będzie odciążna, *np*: ieżli $y = 36$, $b = 27$, $a = 9$, będzie $y - b = a = 36 - 27 = 9$, czyli $9 = 9$. Przeciwnie gdyby było $y - 27$, $b = 36$, $a = 9$, byłoby $y - b = -a = 27 - 36 = -9$, czyli $-9 = -9$; czyli w 1wſzym przypadku ściana $= 9$ byłaby dodatna dlatego: że y od b większe, w 2gim odciążna, że y od b mnieyſze, o czém dobrze pomnieć należy.

PRZYKŁADY POMIAROW CZWOROGRANNYCH.

Zagadnienie 1wſze. Pewna liczba Rzemieślników z czeladzią ſwą ſtanęła do roboty, każdy z Mayſtrów po tyle miał czeladzi, ile

ſamych

ſamych Mayſtrów razem wſzyſtkich wziętych było; była zaś liczba wſzyſtkiéy czeladzi = 625, pytam: iaka liczba Mayſtrów?

Rezolucya. Niech będzie 625 = a, liczba niewiadoma mayſtrów = x; zważając pilnie warunki zagadnienia, oczywiście ſię pokazuje: że liczba niewiadoma mayſtrów zrówna ſię z liczbą czeladzi, gdy tamta wynieſiona będzie do 2go ſtopnia, gdyż wynoſząc do tego ſtopnia, czyli mnożąc ją przez nią ſamą, wyydzie tyle mayſtrów, ile każdy z nich miał czeladzi. Wynoſząc więc x do 2go ſtopnia, będzie $x \times x = x^2$, a podług warunków zagadnienia będzie pomiar czworogranny: $x^2 = a$, który (ponieważ ieſt czyſty przez § XV) redukując, doſyć będzie ścianę czworogranną przez Przepis 2. wyciągnąć z 1wſzéy jego części, po któréy wyciągnieniu zoſtanie $x = \sqrt{a}$, czyli przez Przepis 6. $x = \sqrt{625}$, albo wyciągając tęż ſamą ścianę z 2giéy części przez § XI. będzie $x = 25$. Było tedy mayſtrów 25. Albowiem $25 \times 25 = 625$. C. B. D. R.

Zagadnienie 2gie. Zwieziono poſadzki kamiennéy lub marmurowéy czworogrannéy ſztuk 576, która ma być dana w ſali lub w innném mieyſcu także czworogranném; pyta więc, który ma ją dawać, po wiele ſztuk wſzérz i wzdłuż ma układać: żeby wſzyſtka owa poſadzka wyſzła, czyli żeby nic z niéy nie zbywało, ani do niéy nie brakowało w układaniu do jednéyże miary rzędów? Re-

Rezolucya. Sztuki wzdłuż i wſzérz mające ſię układać niech będą $=x$, którego czworogran $=x^2$. Ponieważ zaś i mieyſce ſamo także ma być czworogranne, więc pomiar będzie: $x^2=576$, czyli wyciągając z obydwóch części ścianę czworogranną, przez § V. i XI, będzie: $x=24$. Albowiem 24×24, czyli wzdłuż i wſzérz układając po 24 ſztuk rzeczonéy poſadzki, będzie $=576$. C.B.D.R.

Zagadnienie 3cie. Rotmiſtrz z Towarzyſtwem ſwém z placu potyczki powróciwſzy zapytany, ile nieprzyiacioł ręką ſwoją na placu położył, ręką, rzecze, moją i towarzyſzów moich legło 1296 głów nieprzyjacielſkich; ta zaś rzecz godna uwagi: iż każdy z nas tyle zabił nieprzyiacioł, ile nas wſzyſtkich razem było. Pytam, wielu towarzyſzów z owym Rotmiſtrzem było i po wiele nieprzyiacioł każdy z nich na placu trupem położył?

Rezolucya. Niech będzie $1296=a$, liczba towarzyſzów $=x$; ponieważ więc każdy z nich tyle nieprzyiacioł zabił, ile ich ſamych było, będzie liczba zabitych równa liczbie towarzyſzów wynieſionéy do 2go ſtopnia, czyli będzie $=x^2$, a ſtąd pomiar: $x^2=a$, z którego wyciągnąwſzy ścianę czworogrannną przez Przepis 2, będzie: $x=\sqrt{a}$, czyli przez Przep: 6. $x=\sqrt{1296}=36$. Było więc towarzyſzów z Rotmiſtrzem 36, i każdy z nich położył nieprzyiacioł 36. Wſzakże $36\times 36=1296$. C. B. D. R.

Zaga-

Zagadnienie 4te. Piotr Kmiotek rzecze do Pawła Sąſiada ſwego: Jam cztéroma korcami mniéy pszenicy wyśiał na zimę, niż ty; a przecię gdyby z każdego ode mnie wysianego korca tyle ſię urodziło, iles ty wysiał, miałbym na przyſzły rok pszenicy kórcy 165. Pytam, ile korcy pszenicy wyſiał Piotr, a ile Paweł?

Rezolucya: Korcy 165 = a, korce zaś od Pawła wyſiane = x, więc podług warunku korce od Piotra wyſiane = x − 4, zaczém gdyby korzec od Piotra wyſiany zarodził tyle, ile wysiał Paweł, Piotr miałby pszenicy korcy: $x - 4 \times x = x^2 - 4x$, te zaś niewiadome korce Pawła rozmnożone przez korce Piotra także niewiadome wyrównałyby ogólnie korcom 165 czyli byłyby = a. Wypada tedy z warunków zagadnienia następujący pomiar: $x^2 - 4x = a$. Co ſię redukcyi tego pomiaru tycze, oczywiſta rzecz: że ten pomiar w 1wſzéy części ſwoiéy ieſt niezupełny (§ XVIII. Przeſtr: 1.) gdzie 1wſzym terminem ieſt x^2, 2gim $-4x$, a 3go brakuje. Dopełniając więc, czyli przez Przepis 5. z połowy wſpółczynnika 2go terminu to ieſt z $\frac{4}{2}$ czyli z 2 robiąc czworogran = 4 i do obywoch części dodając, będzie: $x^2 - 4x + 4 = a + 4$ pomiar zupełny, z którego ścianę czworogranną wyciągnąwſzy przez § VI. będzie: $x - 2 = \sqrt{a + 4}$. Przeniósſzy zaś -2 do 2giéy części, będzie $x = \sqrt{a + 4} + 2$, czyli przez Przepis 6. ilkość a obróciwſzy na liczbę, będzie;

będzie $x=\sqrt{165+4}\pm 2$, czyli $x=\sqrt{169}\pm 2$, wyciągnąwſzy zaś tęż ścianę z 2giéy części, będzie przez § XI : $x=13+2=15$. Paweł więc wyſiał korcy 15, azatém Piotr korcy $15-4=11$. Wſzakże $11\times 15=165$, więc gdyby Piotrowi każdy korzec tyle zarodził, ile wysiał Paweł; miałby Piotr korcy 165. C. B. D. R.

Zagadnienie 5te. Dway Kawalerowie za powrotem od gry tak z ſobą rozprawiają: piérwſzy do drugiego mówi : ty widzę, Przyiacielu, cztéroma Czerwonemi Złotemi więcéy wygrał ode mnie ; gdyby, odpowié drugi, ſummy wygranych od nas Czerw: Złł: zamieniły ſię w czworograny, czworograny te obydwa razem wzięte nie uczyniłyby tylko 400 Cz: Zł: Pytam, ile 1wſzy, a ile 2gi czerwonych złotych wygrał?

Rezolucya. $4=a$, $400=b$, czerwone Złł: od 1wſzego wygrane $=x$, którego czworogran $=x^2$, od 2go wygrane $=x+4$, czyli $x+a$, którego czworogran przez § III $=x^2\pm 2ax\pm a^2$. Będzie zatém, dodawſzy te dwa czworograny podług warunków zagadn: pomiar: $2x^2+2ax+a^2=b$. Czyniąc tego pomiaru redukcyą, naprzód przez Przepis 1. przenoſzę a^2 do 2giéy części i cały pomiar dzielę przez 2, będzie : $x^2+ax=\frac{b-aa}{2}$,

gdzie

gdzie widzę: iż 1wſza część niezupełnym ieſt czworogranem. Dopełniam iéy więc czwororanem $\frac{aa}{4}$ zrobionym z połowy wſpółczynnika 2go terminu ax czyli z $\frac{a}{2}$, przydając go obydwom częściom, będzie: $x^2 + ax + \frac{aa}{4} = \frac{b-aa}{2} + \frac{aa}{4}$; dopiéro wyciągam z 1-wſzéy części ścianę czworogranną przez § VI, będzie: $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{b-aa}{2} + \frac{aa}{4}}$ czyli przeniósſzy wiadomą ilkość do wiadomych i obróciwſzy litery na liczby, będzie: $x = \sqrt{\frac{400-16}{2} + \frac{16}{4}} - 2$, czyli zredukowawſzy: $x = \sqrt{196} - 2$, nakoniec przez Przepis 6.: ścianę wyciągnąwſzy: $x = 14 - 2 = 12$. Piérwſzy więc z owych Kawalerów wygrał Cz: Złł: 12, a 2gi $12 + 4 = 16$. Wſzakże $12 \times 12 = 144$, a $16 \times 16 = 256$, 144 zaś $+ 256 = 400$. C. B. D. R.

Zagadnienie 6ſte. Kozacy Moſkiewſcy Dworek Szlachecki najechawſzy, wydarli Szlachcicowi Zł: Pol: 3,333; z podziału równego tych pieniędzy przypadło na każdego we troje tyle, ile wſzyſtkich tych było najezdników i nadto po Zł: 2. Pytam, ile było Kozaków i po siła na każdego przypadło?

Re-

Rezolucya. Liczba niewiadoma Kozaków x, więc na każdego przypadło z podziału rabunku $3x + 2$, co rozmnożywszy przez x czyli przez liczbę kozaków zapytaną, będzie produkt: $3x^2 + 2x$, azatém wypadnie pomiar: $3x^2 + 2x = 3333$, który redukując, to iest naprzód: dzieląc przez 3 wszystkie terminy, będzie: $x^2 + \frac{2}{3}x = 1111$, potém dopełniając czworogranu przez Przep: 3, czyli biorąc współczynnika terminu 2go i z połowy iego robiąc czworogran, to iest $\frac{2}{3}$ dzieląc przez 2, a wieloraz $\frac{2}{6}$ wynosząc do 2go stopnia, będzie przez § II. p. IV. czworogran $\frac{4}{36}$, który dodawszy do obydwóch części, będzie dopełniony pomiar: $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{36} = 1111 + \frac{4}{36}$ Obracając zaś liczbę całkowitą do przyległey frakcyi podług reguł Arytmetycznych, to iest przez 36 mnożąc całkowitą, a do produktu przydając 4, będzie: $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{36} = \frac{40000}{36}$. Z tego już pomiaru naprzód z części 1wszéy wyciągając ścianę czworogranną przez § VI. będzie $x + \frac{2}{6} = \sqrt{\frac{40000}{36}}$. Wyciągając zaś i z 2giéy części tęż ścianę przez § XI. będzie: $x + \frac{2}{6} = \frac{200}{6}$; nakoniec przenosząc $+ \frac{2}{6}$, będzie: $x = \frac{200}{6} - \frac{2}{6} = \frac{198}{6} = 33$.

Było więc Kozaków 33, każdy zaś biorąc we troje tyle, ile wszystkich było, i nadto Zł: 2, wziął $33 \times 3 = 99 + 2 = 101$. Jakoż $101 \times 33 = 3333$. C. B. D. R.

Zagadnienie 7me. Kawalerowie z Damami w pewnem posiedzeniu umówili się o taką

skła-

ſkładkę pieniężną na wſparcie Szpitala Dzieciątka Jezus : żeby każdy z przytomnych Kawalerów dał przez połowę tyle Czer: Zł: ile wſzyſtkich razem było Kawalerów i nadto ieſzcze Cz: Zł: 3. Damy zaś żeby 3cią część téy kwoty złożyły , którą każdy w ſzczególności Kawaler ofiarował. Było zaś Dam trzy razy więcéy niż Kawalerów , a ſkładka cała wyniosła na Cz: Zł: 720. Pytam , ile wſzyſtkich było Kawalerów , a ile Dam , tudzież po siła na Oſobę każdą przypadło dać do powſzechnéy ſkładki ?

Rezolucya. Niech będzie liczba Kawalerów $= x$, toć Dam $= 3x$, ſkładka Kawalerów $= \frac{x}{2} + 3$. ſkładka zaś Dam , ponieważ 3cią częścią tylko ma być ſkładki Kawalerſkiéy, przez 3 dzieląc $\frac{x}{2} + 3$, będzie $= \frac{x}{6} + 1$. Mnożąc już ſkładkę Kawalerów to ieſt : $\frac{x}{2} + 3$ przez ich liczbę niewiadomą czyli przez x, będzie $\frac{xx}{2} + 3x$, podobnie i ſkładkę Dam $\frac{x}{6} + 1$ mnożąc przez ich liczbę czyli przez 3x podług warunku , gdyż Dam wetroje więcéy było , niż Kawalerów , będzie $\frac{3xx}{6} + 3x$; aże ſkładki te obydwie czynią Czerw: Zł: 720 , wypada pomiar:

$$\frac{xx}{2} + 3x + \frac{3xx}{6} + 3x = 720.$$

$$\text{Czyli : } \frac{xx}{2} + 6x + \frac{xx}{2} = 720.$$

$$\text{Czyli : } x^2 + 12x + x^2 = 1440.$$

$$\text{Czyli : } 2x^2 + 12x = 1440.$$

Nakoniec: $x^2 + 6x = 720$ pomiar niezupełny. Dopełniając go więc przez Przepis 5. to ieſt z połowy 2go terminu to ieſt : z 3 uczyniony

czworogran 9 dodając do obydwóch części, będzie: $x^2 + 6x + 9 = 720 + 9$. Nareście przez § VI. i XI. wyciągając ścianę czworogranną z obydwóch części, będzie: $x + 3 = 27$, czyli $x = 27 - 3 = 24$. Było więc Kawalerow 24, Dam zaś wetroje tyle, więc $24 \times 3 = 72$. Dał zaś każdy Kawaler przez połowę tyle, ile ich wſzyſtkich było i nadto 3, więc dał $\frac{24}{2} = 12 + 3 = 15$, azatém wſzyſcy Kawalerowie złożyli 15×24 ſummę Cz: Zł: $= 360$: toć Damy dając 3cią część tego, co każdy dał Kawaler, czyli 3cią część 15, to ieſt po 5 Cz: Zł, złożyły ſummę Cz: Zł: $72 \times 5 = 360$. Lecz $360 + 360 = 720$ Cz: Zł. C.B.D.R.

Zagadnienie 8*me*. Kupiec zaprzeſtając handlu, ciekawością nabawia ſwych Kollegów: iakiby był iego majątek. O co od jednego z nich zapytany taką daje odpowiedź: gdyby ſumma pieniężna wyrównywająca memu majątkowi pięćdzieſiąt razy była odciągniona od czworogranu téyże ſummy; miałbym 399 millionów Złot: Pytam: czy ów Kupiec takim ieſt bogaczem, iakim ſię być zdaje?

Rezolucya. Summa majątkowi Kupca wyrównywająca niech będzie $= x$, millionów $399 = a$, $50 = b$. Wypada z warunków zagadnienia niezupełny (przez § XVIII. Przeſtr: 1.) pomiar: $x^2 - bx = a$; którego dopełniając przez Przep: 5, czyli biorąc połowę wſpółczynnika terminu 2go i wynoſząc do 2go ſtopnia, a ten przydając do obydwóch części

pomia-

pomiaru, będzie: $x^2 - bx + \frac{\ }{4} = a + \frac{bb}{4}$.

Wyciągaiąc zaś ścianę czworogranną z -wſzéy pomiaru części, będzie: $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{a + \frac{bb}{4}}$ przez § XVIII. Przeſtr: 2. Przenoſząc $-\frac{b}{2}$ do 2giéy części i litery na liczby obracaiąc, będzie: $x = \frac{50}{2} \pm \sqrt{399,000,000; + \frac{2500}{4}}$, obróciwſzy zaś frakcyą na całkowitą i 625 przydawſzy do poprzedzaiącéy, będzie z ſummy téy ściana czworogranna wyciągnionona albo + 19975, albo − 199775 przez Przeſtrogę 2 § wzmiankowanego; azatém 1wszy termin $\frac{50}{2}$ czyli 25 albo przydany do ściany + 19975 pokaże: iż kupuie ów porzucaiący powołanie ſwoje ma Zł: 20,000, albo też od ściany — 19975 odciągniony, wyjawi: iż tenże kupiec winien rzetelnego długu Zł: 19,950, a tak bardzo wątpliwy ieſt ſtan maiątku tegoż Kupca. Zważywſzy atoli, co ſię rzekło pod § XVIII. Przeſt: 2, że w przedoſtatnim pomicrze: $x - \frac{b}{2} = \sqrt{a + \frac{bb}{4}}$ ilkość x większa ieſt niż $-\frac{b}{2}$, bo ilkość $\frac{b}{2}$ ieſt $= \frac{50}{2}$ czyli $= 25$, a ilkość x wyraża ſummę, która od czworogranu z niéy ſaméy uczynionego odciągniona podług warunku zagadnienia dać powinna reſztę $=$ 399 Millionów, wnieść można: że wyciągniona z liczby pod znakiem ściennym położonéy ściana 19975 ieſt dodatna, azatém przydana do $\frac{b}{2}$ czyli do 25 wyraża rzetelny Kupca maiątek nie millionowy wprawdzie, iak ſię mogło komu zdawać, ale tysiączny $=$ 20,000. Jakoż roztrząſaiąc warunki Zagadnienia,

nia, Rezolucya ta okaże się do prawdy podobnieyſza. Biorąc bowiem 50 razy 20,000, to ieſt mnożąc tę ſummę przez 50, a produkt =1,000,000 odciągając od czworogranu téyże ſummy to ieſt od liczby 400,000,000; zoſtanie reſzta, iaka w Zagadnieniu była warowana to ieſt: 399 millionów. Przeciwnie gdyby wynaleziona ściana 19,975 za odciążną była wzięta i od niéy 25 odciągnione były, reſzta 19950 nie uczyniłaby zadosyć warunkom Zagadnienia, gdyż ſumma 19950 wzięta 50 razy i od czworogranu ſwego odciągniona nie dałaby reſzty w Zagadnieniu warowanéy=399 millionów. C. B. D. R.

Zagadnienie 9te. Pewny z Kapitaliſtów daje na handel 10,000 Czer: Zł: Kupcowi, umówiwſzy ſię z nim o roczny procent; ale kupiec w rok zaraz po wzięciu téy ſummy bankrutować zaczyna; prosi atoli: ażeby mu wierzyciel do 2go roku czekał pożyczonéy ſummy wraz z procentem. Po upłynionych dwóch leciech gdy ſię byt kupca nie polepſza, a Kredytorowie przyciſkaią go o wypłacenie długów, podaje cały majątek ſwóy ruchomy i nieruchomy na prawny między tychże kredytorów podział, czyli, iak mówią, *in potioritatem.* Po prawném rozſądzeniu żaden z Kredytorów należytości ſwoiéy nie odbiera bez defalki, a w ſzczególności wzmiankowany Kapitaliſta ſtraciwſzy dwuletnią prowizyą, na ſamym nawet Kapitale znacznie uſzkodzony

zoſta-

zoſtaje, nie odzyſkując z 10,000 Czer: Złot: tylko 8,100. Pyta więc po siła na ſtu traci?

Rezolucya. Ponieważ 8,100 odzyſkał, więc na Kapitale 10,000 ſtracił ogólnie 1,900 Cz: Zł:, gdyż $10,000 - 1900 = 8,100$. Jle zaś w ſzczególności na każdém ſtu ſtracił, ſzukać trzeba przez Regułę proporcyi, założywſzy $-x$ za niewiadomą ſtratę, będzie: $100. - x :: 10,000.$ (mnożąc 3ci termin przez 2gi, a produkt dzieląc przez 1wſzy) ſtrata po roku $= -100x$; po 2gim zaś, podobnie działajac, a przepiſy na znaki w mnożeniu i dzieleniu zachowując, będzie: $100. - x :: 10,000 - 100x.$ ſtrata $= -100x + x^2$. Zebrawſzy iuż te dwie ſtraty w iednę ſummę, i z ogólną ſtratą zrównawſzy, wypadnie pomiar czworogranny: $-200x + x^2 = -1,900$. Czyli: $x^2 - 200x = -1,900$. Dopełniając zaś pomiaru, czyli dodając do obydwóch iego części czworogran zrobiony z połowy wſpółczynnika 2giego terminu; będzie: $x^2 - 200x + 10,000 = -1,900 + 10,000$. Wyciągając ścianę z 1wſzéy pomiaru części przez § VI, będzie: $x - 100 = \sqrt{-1,900 + 10,000}$. Odciągając 1,900 od 10,000, będzie: $x - 100 = \sqrt{8,100}$. Wyciągając też ścianę z 2giéy części przez § XI, będzie przez Przeſtrogę 2. § XVIII: $x - 100 = \pm 90$, to ieſt: $=$ albo $+90$, albo też -90. Biorąc nakoniec wyciągnioną ścianę za odciążną z przyczyny w téyże Przeſtrodze wyłuſzczo-

ſuſzczonéy, i przenoſząc wiadome do wiadomych, będzie: x = 100 — 90 = 10. Wſzakże ieżli kupiec ów w pierwſzym roku ſtracił 10 na 100, toć na 10,000 ſtracił 1,000 (gdyż: 100. 10 :: 10,000. 1,000.) i nie zoſtało mu z kapitału na rok 2gi tylko 9,000, toć w roku 2gim 10 tracąc na 100, na 9,000 ſtracił 900 (gdyż 100. 10 :: 9,000. 900.) A że 1000 + 900 = 1,900 ſtracie ogólnéy, więc po 10 na 100 ſtracił. C. B. D. R.

Zagadnienie 10*te*. Ociec umieraiący zoſtawił młodocianemu Synowi ſwemu intraty roczney Czer: Zł: 200. Naznaczony ſierocie Opiekun i obowiązany: aby, ile możności, powiękſzał ſzczupłą tę iego intratę. Jakoż Opiekun w 1wſzym zaraz opieki ſwéy roku z odebranéy wcześnie owéy intraty odłożywſzy na potrzeby Młodzieńca Cz: Zł: 100, a reſztę to ieſt 2gie 100 na prowizyą dawſzy, znacznie powiękſzył przerzeczoną iego intratę; ale znaczniéy ią ieſzcze powiękſzył na drugi rok, gdy z piérwſzoroczněy téy całéy intraty nie wydawſzy tylko Cz: Zł: 130, oſzczędził 70 i dał znowu na podobną prowizyą. Wiadomo zaś nie ieſt: na iaką prowizyą oſzczędzone owe Czer: Zł: 100 na początku 1go roku były dane, to tylko po upłynionych dwu latach opieki pokazało ſię: iż z téy dwuletniéy prowizyi do intraty od Oyca zoſtawionéy przybyło Młodzieńcowi Czer: Zł: $14 + \frac{31}{38}$ (na Zagadnienia podobne bez frakcyi będzie Re-

zolucya

zolucya 2ga i 3cia ogólna) Pytam: na iaką prowizyą wzmiankowane Czer: Zł: 100 były oddane ?

Rezolucya 1. Pieniądze od wydatku piérwſzororocznego odcięte i na prowizyą dane to ieſt Czer: Zł: 100 $=$ a , odcięte zaś od drugorocznego wydatku Czer: Zł: 70 $=$ b, powiękſzenie intraty Czer: Zł: $14 + \frac{31}{38} =$ d, prowizya od 100 niewiadoma , podzieliwſzy a $=$ 100 przez x, będzie $= \frac{a}{x}$. * Po roku więc owa śierota mieć będzie intraty Cz: Zł: 200 $+ \frac{a}{x}$, a że z téy intraty na początku 2go roku

---

(*) Prowizye od summ Kapitalnych różne są w różnych Krajach. W naszym poźnieyszém prawem ustanowiona prowizya świecka iest po 5 od sta , aże 5 iest 20stą częścią sta , prowizya taka wyrazić się może tą frakcyą $\frac{100}{20}$, gdyż frakcyą tę obracając na liczbę całkowitą wypada wieloraz 5 to iest prowizya po 5 od 100 , gdyż w 100 dwadzieścia razy zawiera się 5 to iest prowizya wzmiankowana. Podobnym sposobem wszelką inną prowizyą albo prawem, albo zwyczajem uchwaloną wyrazić można *np:* prowizyą po 4 od 100, ponieważ 4 w 100 mieści się 25 razy , wyrazi frakcya $\frac{100}{25}$ *i t. d.* iako się namieniło w Części I. w Przestrodze pod Zagad: 1. o defalkach. Gdy więc prowizya będzie niewiadoma , iaka iest w tém Zagadnieniu , założywszy za nią x, dobrze się wyrazi przez frakcyą $\frac{100}{x}$, albo założywszy za 100 literę a, przez frakcyą literalną : $\frac{a}{x}$.

ku odcięte Czer: Zł: 70 i znowu na prowizyą ſą dane, przybędzie do intraty piérwſzoroczné w 2gim roku ſumma Czer: Złol: $70 + \frac{a}{x}$ czyli $b + \frac{a}{x}$, od któréy chcąc wynaleść prowizyą, potrzeba $b + \frac{a}{x}$ przez x podzelić tak, iak ſię poſpolite frakcye dzielą, będzie tedy powiękſzenie drugoroczné intraty: $\frac{1}{x} \times \frac{b}{1} + \frac{a}{x} = \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$, azatém po upłynionym czasie dwuletniéy opieki ogólne teyże intraty powiękſzenie będzie $= \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$.

Że zaś to powiększenie według warunku zagadnienia ieſt $= 14 + \frac{31}{36} = d$, więc naſtępujący wypada pomiar: $d = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$, w którym gubiąc frakcye, czyli mnożąc przez x^2 wſzyſtkie inne terminy (iak ſię uczyło w Części I. na kar: 66) będzie: $dx^2 = \frac{ax^2}{x} + \frac{bx^2}{x} + a$. Obracając zaś frakcye na całkowite, to ieſt: przez mianownika x dzieląc liczników, będzie: $dx^2 = ax + bx + a$. Przenoſząc: $dx^2 - ax - bx = a$. Dzieląc przez d: x^2

$x^2 - \frac{ax - bx}{d} = \frac{a}{d}$. Tak zredukowany pomiar, odłączywſzy ilkość x od wſpółczynników ſwych a i b, a rozmnożenie przez nią obydwóch terminów znakiem mnożenia wyraziwſzy, zamieni ſię w naſtępujący: $x^2 - \frac{a-b}{d} \times x = \frac{a}{d}$; gdzie dla ułatwienia dalſzéy redukcyi za $\frac{a-b}{d}$ założywſzy $= f$, będzie nowy pomiar czworogr: $x^2 - fx = \frac{a}{d}$; w którym, ponieważ część 1wſza ieſt niezupełna przez § XVIII. Przeſtr: 1, dopełniając iéy, przydać trzeba do obydwóch pomiaru części czworogran zrobiony z połowy wſpółczynnika 2go terminu; ; tym ſpoſobem pomiar dopełniony będzie: $x^2 - fx + \frac{f^2}{4} = \frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}$, z którego 1wſzéy części wyciągnąwſzy ścianę czworogranną przez § VI, a w 2giéy wyraziwſzy toż wyciągnienie znakiem ściennym, będzie $x - \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$ czyli: $x = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$. Naoſtatek obróciwſzy litery

na

na liczby w 2giéy pomiaru części, a z liczb wyciągnąwſzy ścianę czworogranną przez § XI. wypadnie: x = 12 to ieſt: zapytana prowizya. Ale że zaczynający mogliby mieć trudność w tém obracaniu liter na liczby rówie iak w wyciąganiu z liczb ściany czworogrannéy; więc dla ułatwienia téy roboty, tudzież dla dania do innych podobnych prawidła, całe to działanie wyłuſzczyć naydokładniéy należy. *Naprzód:* założone były litery za liczby a za 100, b za 70, d za powiękſzenie intraty czyli za $14 + \frac{31}{36}$ Cz: Zł:, to ieſt: za $\frac{535}{36}$, nakoniec dla łatwieyſzéy pomiaru redukcyi za frakcyą — $\frac{a-b}{d}$ założyła ſię ilkość —f, a że po oſtatniéy pomiaru redukcyi taż ilkość —f przenieſiona ieſt do 2giéy części z odmiennym znakiem, więc iako — f zamieniło ſię w + f, tak — $\frac{a-b}{d}$ zamienić ſię musi w + $\frac{a+b}{d}$, azatém frakcyą tę literalną obracając na liczby, będzie = $\frac{100+70}{\frac{535}{36}}$; czyli dodawſzy 70 do 106, a ſummę 170, tudzież 1wſzego mianownika 535 podzieliwſzy przez 5, będzie na mnieyſze terminy zredukowana frakcya: $\frac{34}{\frac{107}{36}}$; nakoniec podzieliwſzy $\frac{34}{107}$ przez 36

36 tak, iak ſię poſpolite frakcye dzielą, będzie: $\frac{1224}{107}$, azatém będzie $f=\frac{1224}{107}$, więc połowa ilkości f czyli $\frac{f}{2}=\frac{612}{107}$, a czworogr: téy połowy $=\frac{612}{107}\times\frac{612}{107}=\frac{374544}{11449}$, a zatém $x=\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{a}{d}+\frac{f^2}{4}}=\frac{612}{107}+\sqrt{\frac{a}{d}+\frac{374544}{11449}}$. *Powtóre*: $\frac{a}{d}=\frac{100}{\frac{535}{36}}$, czyli dzieląc $\frac{100}{535}$ przez 5, a wieloraz $\frac{20}{107}$ dzieląc przez 36, będzie: $\frac{a}{d}=\frac{720}{107}$. Téy już frakcyi obydwa terminy przez iednąż liczbę rozmnożywſzy *np*: przez tegoż ſamego mianownika 107, walor iéy bynaymniéy nie odmieniony, będzie $=\frac{77040}{11449}$, a tak będzie: $\frac{a}{d}=\frac{77040}{11449}$. Cały tedy pomiar zredukowany do iednéy niewiadoméy ilkości będzie: $x=\frac{612}{107}+\sqrt{\frac{77040}{11}+\frac{374544}{749}}$, czyli dodając, będzie: $x=\frac{612}{107}+\sqrt{\frac{451584}{11449}}$. Wyciągając zaś z liczby pod znakiem położonéy ścianę czworogranną przez § XI. będzie $x=\frac{612}{107}+\frac{672}{107}$. Albowiem wyciągając ią naprzód z licznika 45, 15, 84 przez rzeczony §, będzie czwor: 36 z tabliczki wzięty bliſki liczby

w 1wſzéy

w 1wſzéy przedziałce umieſzczonéy 45, któ-
rego ściana 6 położy ſię za 1wſzy termin ścien-
ny, a tego czworogran 36 odciągnąwſzy od
45, i do reſzty 9 przyłączywſzy 2gą prze-
działkę 15, też odcięte liczby 91 podzieliwſzy
przez dwóykę znalezionego 1wſzego terminu
to ieſt przez 12, wieloraz 7 będzie 2gim ter-
minem ściennym, który przyłączony do dziel-
nika 12 i z nim razem rozmnożony przez ſie-
bie ſamego uczyni 889, co odciągnąwſzy od
915 i do reſzty 26 przyłączywſzy 3cią prze-
działkę 84, będzie 268,4; podzieliwſzy zaś
268 przez dwóykę obydwóch terminów ścien-
nych za ieden wziętych czyli przez 134, wy-
padnie termin 3ci ścienny = 2, który złą-
czony z tymże dzielnikiem i rozmnożony z nim
przez ſiebie ſamego uczyni 2684, naoſtatek
produkt ten odciągnąwſzy od reſzty przedział-
ki 2giéy i od całéy 3ciéy, nic nie zoſtanie, a-
zatém ściana z licznika wyciągniona = 672.
Podobnym ſpoſobem wyciągnąwſzy ią z mia-
nownika, będzie = 107 więc x = $\frac{612+672}{107}$ =
$\frac{1284}{107}$ = 12. Oſzczędzone tedy 100 Czer: Zł:
i na prowizyą po 12 od 100 w 1wſzym opieki
roku dane były. W ſaméy bowiem rzeczy,
kiedy Cz: Zł: 100 dane na prowizyą przynio-
ſły zyſku 12, zyſk ten ieſt = $\frac{100}{12}$, azatém
piérwſzoroczna intrata = 200 + $\frac{100}{12}$; z którey
130 odłożywſzy na wydatki, a reſztę = 70
+ $\frac{100}{12}$ na podobnąż po 12 od 100 prowizyą da-
wſzy, będzie taż prowizya = $\frac{70}{12}$ + $\frac{100}{12 \times 12}$ in-
tra-

tratę drugoroczną powiękſzającą, do któréy łącząc zyſk 1 wſzoroczny $=\frac{100}{12}$, będzie ogólne powiękſzenie intraty sierocéy po dwu latach opieki $=\frac{100}{12}+\frac{70}{12}+\frac{100}{144}$, czyli obróciwſzy te frakcye do iednego mianownika, będzie: $\frac{300}{36}+\frac{210}{36}+\frac{25}{36}=\frac{535}{36}=14+\frac{31}{36}$. C.B.D.R.

Rezolucya 2*ga*. Gdyby rzeczony dwuroczny zyſk był całkowitą liczbą wyrażony *np*: gdyby był $=18$ natenczas byłoby $d=18$, $f=\frac{a+b}{d}$ byłoby $=\frac{170}{18}$, azatém połowa $\frac{f}{2}=\frac{85}{18}$, czworograń zaś téy połowy $\frac{f^2}{4}=\frac{85}{18}\times\frac{85}{18}=\frac{7225}{324}$; nakoniec $\frac{a}{d}=\frac{100}{18}$, czyli mnożąc obadwa terminy przez iednęż liczbę *np*: przez 18, byłoby: $\frac{100}{18}\times\frac{18}{18}=\frac{1800}{324}$; cały więc ów pomiar: $x=\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{a}{d}+\frac{f^2}{4}}$ zamieniłby ſię w naſtępujący: $x=\frac{85}{18}+\sqrt{\frac{1800}{324}+\frac{7225}{324}}$, czyli $x=\frac{85}{18}+\sqrt{\frac{9025}{324}}$;

a wyciągnąwſzy z liczby pod znakiem ściennym położonéy ścianę czworogranną przez § XI, wypadłby proſty pomiar: $x = \frac{85}{18} + \frac{95}{18} = \frac{180}{18} = 10$ to ieſt: prowizya od 100 Czerw: Zł: w 1wſzym roku oſzczędzonych. Gdyż biorąc 10 od 100 w 1wſzym, a od $70 + \frac{100}{10}$ w 2gim roku, byłoby ogólne powiękſzenie dwuletniéy intraty $= \frac{100}{10} + \frac{70}{10} + \frac{100}{10 \times 10} = 10 + 7 + 1 = 18$. C. B. D. R.

Rezolucya 3cia ogólna. Zgaadnienie to ſamo może ſię ogólnym ſpoſobem rezolwować, azatém do wielu innych podobnych przypadków przyſtoſować. Niech będzie intrata od Oyca Synowi zoſtawiona nieokréślona $= r$, wydatek piérwſzoroczny $= a$, drugoroczny $= b$, powiękſzenie intraty z oſzczędzonych tych wydatków dwuletnich $= d$, będzie reſzta z intraty 1wſzoroczněy, odciąwſzy od niéy wydatek, $= r - a$, prowizya zaś od niéy będzie: $\frac{r-a}{x}$, przeto cała 1wſzoroczna intrata $= r + \frac{r-a}{x}$, od którey odciąwſzy wydatek 2go roku $= b$, będzie reſzta intraty natenże rok $= r - b + \frac{r-a}{x}$, a tę dając znowu na prowizyą x, będzie prowizya ta $=$

r—b

$\frac{r-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}$; nareście przyłączywszy do téy prowizyi 1 wszoroczną $= \frac{r-a}{x}$, będzie powiększenie ogólne dwuletniéy intraty $= \frac{r-a}{x} + \frac{r-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}$, czyli zredukowawszy 1-wsze dwa terminy, będzie $= \frac{2r-a-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}$. Tu już dla ułatwienia dalszéy redukcyi zakładając litery pojedyńcze za wielokrotne, to iest: m za 2 r — a — b, c zaś za r — a, będzie ogólne intraty powiększenie $= \frac{m}{x} + \frac{c}{x^2}$; aże za toż powiększenie na początku założyło się d; więc wypadnie pomiar: $\frac{m}{x} + \frac{c}{x^2} = d$, który uwalniając od frakcyi, czyli mnożąc przez x^2, będzie: $\frac{mx^2}{x} + c = dx^2$, dzieląc 1wszy termin, będzie: $mx + c = dx^2$, przekładając mx do 2giéy części, będzie: $c = dx^2 - mx$, naostatek

oſtatek dzieląc przez d, będzie: $\frac{c}{d} = x^2 - \frac{mx}{d}$, czyli $x^2 - \frac{mx}{d} = \frac{c}{d}$ pomiar czworog: w którym obróciwſzy litery wyrażające ilkości wiadome na liczby i ścianę czworogranną wyciągnąwſzy, znaydzie ſię prowizya zapytana. Daymy *np*: że r (czyli intrata roczna od Oyca Synowi zoſtawiona) = 400 Cz: Zł:, a (czyli wydatek rwſzoroczny) = 200 Cz: Zł, b (czyli wydatek drugoroczny) = 260, d (czyli powiękſzenie intraty) = 36, więc m (ponieważ założone było za $2r - a - b$) = 340, c zaś założone będąc za $r - a = 200$, azatém zredukowany oſtatni pomiar: $x^2 - \frac{mx}{d} = \frac{c}{d}$ obróciwſzy na liczby, zamieni ſię w ten: $x^2 - \frac{340x}{36} = \frac{200}{36}$, który, iako widoczna, nie ieſt zupełny; dopełniając go więc czyli z połowy wſpółczynnika 2go terminu robiąc czworogran, to ieſt: przez $\frac{2}{1}$ dzieląc frakcyą $\frac{340}{36}$, albo raczéy wſpak obróciwſzy dzielnika, przez $\frac{1}{2}$ mnożąc ią, a produkt $\frac{340}{72}$ wynoſząc do 2go ſtopnia, będzie: $\frac{115600}{5184}$, który do obywóch pomiaru części dodając, będzie dopełniony pomiar: $x^2 - \frac{340x}{36} + \frac{115600}{5184} = \frac{200}{36} + \frac{115600}{5184}$. Dopiéro wyciągając z 1wſzéy części ścianę czworogranną, będzie 1wſzy termin

ścienny

ścienny : $= x$, przez którego dwóykę to iest przez 2x dzieląc — $\frac{340x}{36}$ (podłożywszy 1 pod 2x i przez $\frac{1}{2x}$ rozmnożywszy — $\frac{340x}{36}$) będzie x — $\frac{340x}{72x}$ czyli podług reguł dzielenia, x tak w liczniku, iako i w mianowniku wymazawszy, będzie ściana zupełna: $x - \frac{340}{72}$, z którey czworogran zrobiony i od 1wszey części odciągniony żadney reszty nie zostawi, azatem pomiar co do 1wszey części zredukowany będzie : $x - \frac{340}{72} = \sqrt{\frac{200}{36} + \frac{115600}{5184}}$, czyli $x = \frac{340}{72} + \sqrt{\frac{200}{36} + \frac{115600}{5184}}$. Chcąc zaś wyciągnąć też ścianę z 2giey części z terminów pod znakiem położonych, obrócić wprzód potrzeba frakcye do iednego mianownika, mnożąc przez 144, będzie : $\frac{28860}{5184} + \frac{115600}{5184}$, a te dodając, będzie : $x = \frac{340}{72} + \sqrt{\frac{144400}{5184}}$, toż wyciągnąć rzeczoną ścianę przez § XI. z licznika i mianownika, będzie : $x = \frac{340}{7} + \frac{380}{72}$, czyli dodając: $x = \frac{720}{72} = 10$. Pozostała więc summa od wydatku 1wszorocznego $= 200$ Cz: Zł: była dana na prowizyą po Cz: Zł. 10 od 100. Jakoż biorąc po 10 do 100, wypada ogólne powiększenie intraty przez dwa lata: $\frac{200}{10} + \frac{140}{10} + \frac{200}{10 \times 10} = 20 + 14 + 2 = 36$. C.B.D.R.

Przestroga. Można łatwo z istoty zagadnienia ostatniego wyczerpnąć tę wiadomość arcy-potrzebną : że gdyby z podobnemi warunkami powiększania corok sierocey intraty opieka daley się ciągnęła, intrata owa coraz bardziey pomnażałaby się, *np*: gdyby opieka przez 3 lub 4 lata trwać miała, w rezolwo-

 wa-

waniu takiego zagadnienia pomiar wypadłby w 3cim lub 4tym ſtopniu tak dalece, że w zagadnieniach tego gatunku ekwacye mogłyby wſzelkich domyślnych ſtopniów dochodzić. Co rzeczywiſtym ieſt dowodem: że różne ſpółeczeńſtwa ludzkiego intereſſa nie łatwo ſię obeydą bez tey nawet części Algebry, która o pomiarach wyżſze ſtopnie w ſobie zawierających traktuje. Nie ieſt to tedy ciekawość iaka prożna zabawce dowcipu ſłużąca, ſzukać ſpoſobów rezolwowania trzecioſtopniowych, lub nad 3ci wyżſze ieſzcze ſtopnie w ſobie zawierających pomiarów, ponieważ ciekawość ta rodzi ſię z potrzeb towarzyſtwa ludzkiego nieuchronnych. Z tego powodu przyda ſię tu ieſzcze krótka nauka licznemi przykładami objaśniona o Pomiarach nad 3gi ſtopień wyżſzych.

ROZDZIAŁ VI.

O Pomiarach Sześciogrannych i ich redukcyi.

NIm ſię przyydzie do redukcyi tych pomiarów, należy wprzód krótko przełożyć wewnętrzny ich ſkład, różność ścian w nich ukrytych i odmiany terminów też pomiary ſkładających, bez czego redukcyi ſamey uczynić nie można.

§ XIX. Skład wewnętrzny tych pomia-

miarów, owſzem i nad te wyżſzych dorazu ſię okaże, wziąwſzy iakiekolwiek ściany i na pomiary ie proſte obróciwſzy, które gdy ſię przez ſiebie rozmnożą, wypadną w produkcie pomiary ſkładane tylu ſtopniów, ile ſię ścian do mnożenia wzięło, a te cały ſkład ſwóy na oko pokażą; *np:* wziąwſzy x = a, x = b, x = c, czyli: x — a = o, x — b = o, x — c = o przez § XVI. p. II, i rozmnożywſzy 1wſzy z tych proſtych pomiarów przez 2gi, a produkt przez 3ci, wypadnie pomiar ſześciogranny przez tenże §. p. III.

$$\begin{aligned} x^3 &- ax^2 + abx \\ &- bx^2 + acx - abc = o. \\ &- cx^2 + bcx \end{aligned}$$

który gdyby był rozmnożony przez inny proſty, zamieniłby ſię w czwartoſtopniowy *i t. d.* a iak tego, tak i innych ſkład z ſamych terminów oczywiście dałby ſię widzieć.

§ XX. Co ſię tycze ścian ſześciogrannych i innych wyżſzoſtopniowych, wiedzieć trzeba I. Ze w każdym ſkładanym pomierze tyle ścian być muſi, ile niewiadoma ilkość w 1wſzym terminie zawarta ma w ſobie wymiarów ſtopniowych, to ieſt: w pomierze ſześciogrannym trzy zawſze być muſzą ściany, w czwartoſtopniowym 4, *i t. d.* *II.* Jlkości wiadome w 2gim terminie zawieraią ſummę wſzyſtkich ścian pod znakiem przeciwnym, to ieſt: ściany dodatne pod znakiem —, odciążne pod znakiem +, w 3cim zaś terminie zawieraią

dukt dwóch ścian pod znakiem właſnym, a w 4tym produkt wſzyſtkich ścian pod znakiem przeciwnym, co oczywiście daje ſię widzieć w przykładzie wyżéy przytoczonym; a ſtąd już można ſię dorozumiéwać, które i iakie ściany pomiar ſkładany w ſobie zawiera. *III.* Jle ieſt terminów z odmiennemi znakami — i ✠ na przemiany położonych w pomierze ſkładanym, tyle ieſt ścian rzetelnych, a tyle odciążnych, ile terminów iednoznacznych, które będąli wſzyſtkie dodatne, ściany wſzyſtkie muſzą być nierzetelne, i przeciwnie. *IV.* Jle razy ściany rzetelne równe ſą nierzetelnym, tyle razy 2gi termin pomiaru ginie, *np:* ieśli $x = 2$, potém $x = 3$, nareście $x = -5$, zrobiwſzy z tych trzech proſtych pomiar ſześciogranny, będzie bez 2go terminu $x^3 * - 19x + 30 = 0$. Jeśli zaś ścian rzetelnych więcéy ieſt od nierzetelnych, termin 2gi musi być odciążny, i przeciwnie. *V.* Na poznanie, iaka ieſt ściana: dodatna, czy odciążna, prócz namienionych ſą i te ieſzcze ſpoſoby, 1*wſzy:* Wziąć ilkość dwukrotną z niewiadoméy i wiadoméy złożoną, i podzielić przez nią dany pomiar, ta, byle bez reſzty podzieliła, pokaże ścianę z przeciwnym znakiem, *np:* podzieliwſzy przez $x - 4$ pomiar: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, ponieważ podział bez reſzty ſię udaje, pokazuje ścianę z przeciwnym znakiem to ieſt $+4$ przeto, iż pomiary ſkładane wypadają z mnożenia, a dzielenie mnożeniu ieſt

prze-

przeciwne. *2gi*: Założywszy w pomierze danym za niewiadomą ilkość wiadomą iakąkolwiek, ieśli ta dla znaków przeciwnych zepsuje wszystkie jego terminy, będzie ścianą szukaną *np*: w pomierze: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ założywszy $+ 4$ za x, będzie $64 - 48 - 40 + 24 = 0$, 4 więc iest ścianą tego pomiaru dodatną.

Przestroga. Sposoby te poznawania ścian sześciogrannych skrócić całem mogą i zastąpić przydłuższe niżéy położone sposoby redukowania pomiarów wyższostopniowych, iako się da widzieć niżéy w rezolucyi 1wszych zagadnień między przykładami pomiarów sześciogrannych.

§ XXI. Trafia się potrzeba zamienienia ścian rzetelnych w nierzetelne i przeciwnie, tudzież zwiększenia ich lub zmnieyszenia inną iaką ilkością, co się tak działa: *I*. Odmieniwszy w składanym pomierze znaki terminów parzystych, to iest 2go, 4tego *i t. d.* tém samém odmienione zostaną ściany rzetelne w nierzetelne i przeciwnie, *np*: w pomierze: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, gdzie, iako się pokazuje z samych znaków, przez § poprzedz: dwie są ściany rzetelne, a iedna nierzetelna, odmieniwszy znaki 2giego i 4tego terminu, żeby było: $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, zamienią się i ściany w przeciwne. *II*. Chcąc powiększyć tegoż samego pomiaru $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ wiadome ściany liczbą *np*:

3, robi się prosty pomiar $x + 3 = y$, czyli $x = y - 3$, i zakłada się ta cena za x w danym pomierze, wynosząc ią całą do tegoż stopnia, do którego x w każdym terminie danego pomiaru iest wyniesione, a stopnie te przez współczynników téyże ilkości x mnożąc, będzie:

$$\begin{array}{l|r} x^3 & = y^3 - 9y^2 + 27y - 27. \\ -3x^2 & - 3y^2 + 18y - 27. \\ -10x & - 10y + 30. \\ + 24 & + 24. \end{array}$$

$$Summa = y^3 - 12y^2 + 35y \quad * = 0.$$

Gdzie ściany danego pomiaru są zwiększone liczbą 3 tak, że które przedtém przez §. poprzedzający były $= 2 + 4 + 3$, stały się $= 5 + 7 + 0$, gdyż $+ 3 - 3$ dla przeciwnych znaków $= 0$. Podobnie się działa zmnieyszając ściany, byle liczba do zmnieyszenia wzięta była z przeciwnym znakiem, czego przykład będzie niżéy.

§ XXII. Odmiany terminów składaiących pomiar sześciogranny lub inny wyższostopniowy zależą albo na rugowaniu iakiego terminu z pomiaru, albo na wyszukaniu go dla dopełnienia pomiaru i ułatwienia dalszéy iego redukcyi. *I.* Rugować się z pomiaru składanego nayczęściéy zwykł termin 2gi, który gdy iest z znakiem +, wyruguje się i zgubi, zwiększywszy ściany pomiaru wspólczynnikiem tegoż samego terminu 2giego podzielonym

lonym przez wykładnika 1wſzego terminu, a gdy ieſt z znakiem —, wyruguje ſię zmnieyſzywſzy ściany iego (przez §. poprzedz:) tymże i tak podzielonym wſpółczynnikiem: Niech będzie *np:* pomiar $x^3 - 12x^2 + 44x - 4x = 0$, w którym rugując termin 2gi, dzielę iego wſpółczynnika przez wykładnika terminu 1wſzego, będzie $-\frac{12}{3} = -4$ wieloraz, którym dla znaku — zmnieyſzyć trzeba ściany danego pomiaru. Wziąwſzy więc $x - 4 = y$, czyli $x = y + 4$, i założywſzy za x tę cenę wynieſioną do iednych z nim ſtopniów w pomierze danym przez § poprzedzaiący, będzie:

x^3	$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64.$
$-12x^2$	$- 12y^2 - 96y - 192.$
$+44x$	$+ 44y + 176.$
-48	$- 48.$
Sum: bez 2go terminu.	$= y^3 * - 4y * = 0$ *i t. d.*

II. Do dopełnienia pomiaru ſześciogrannego (co i wyżſzoſtopniowym ſłuży) terminem 2gim doſyć ieſt, zwiękſzyć ściany iego ilkością wiadomą, tak *np:* chcąc dopełnić pomiaru $x^3 * - 19x - 30 = 0$ terminem 2gim, którego tu brak, biorę $x + 1 = y$, czyli $x = y - 1$, i zakładam tę cenę za x w danym pomierze, wynoſząc ią do iednychże z x ſtopniów, będzie:

x^3

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1. \\ -19x & \qquad\qquad -19y + 19. \\ -30 & \qquad\qquad\qquad -30. \end{array}$$

Sum: z term:
2gim: $y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0.$

§ XXIII. *O redukcyi pomiarów ſześciograńnych.*

Jeżeli ſię trafią w nich frakcye, te przed wyrugowaniem ieſzcze terminu 2giego zgubić trzeba iednym z naſtępujących ſpoſobów, to ieſt: albo mnożąc niewiadomą danego pomiaru ścianę x przez produkt mianowników wſzyſtkich i cenę iéy zakładając za nią w danym pomierze, albo z powſzechnéy mianowników miary, ieśli ſię znaydzie, zrobiwſzy progreſſyą Geometryczną zaczynającą ſię od 1, przez każdy termin téy progreſſyi mnożąc każdy odpowiadający termin pomiaru, a potém frakcye na całkowite obracając; *np:* gubiąc frakcye 1wſzym ſpoſobem w tym pomierze: $x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{a^2x}{c} + \frac{a^3}{b} = 0$, mnożę ścianę pomiaru niewiadomą x przez bcd, a produkt bcdx równam z inną niewiadomą ilkością *np:* y, żeby było: bcdx = y, czyli $x = \frac{y}{bcd}$, i tę cenę zakładam w danym pomierze za x,

wynoſząc

wynoſząc ią do iednychże z x ſtopniów, będzie:

$$\frac{y^3}{b^3c^3d^3} - \frac{ay^2}{b^3c^2d^2} + \frac{a^2y}{bc^2d} + \frac{a^3}{d} = 0,$$

dopiéro mnożę przez $b^3c^3d^3$ wſzyſtkich liczników prócz 1wſzego i frakcye na całkowite obracam, wypadnie pomiar bez frakcyi: $y^3 - acdy^2 + a^2b^2cd^2y + a^3b^3c^3d^2 = 0$. Gubiąc zaś drugim ſpoſobem frakcye w tym *np:* pomierze: $y^3 - \frac{7y^2}{3} - 4y - \frac{32}{3} = 0$, z 3 iako powſzechnéy mianowników miary robię progreſſyą 1. 3. 9. 27. i tak układam:

$$y^3 - \frac{7y^2}{3} - 4y - \frac{32}{3} = 0.$$
$$1. \quad 3. \quad 9. \quad 27.$$

toż przez każdy zoſobna termin progreſſyi mnożę odpowiadający termin każdy pomiaru, i frakcye redukuję na całkowite, będzie: $y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$ *i t. d.*

§ XXIV. Po zgubieniu frakcyi i terminu 2go chcąc daléy redukować pomiar ſześciogranny (co i o innych wyżſzych ma ſię rozumieć) doświadczyć naprzód można powſzechnieyſzych redukowania ſpoſobów w § XVII. opiſanych, a ieżli z tamtych żaden ſię nie uda, trzeba dany pomiar obrócić do iednéy którey z tych formuł:

$$x^3 * - px + q = 0$$
$$x^3 * - px - q = 0$$
$$x^3 * + px - q = 0.$$

które wyrażaią wſzelkie pomiary ſześciograne uwolnione od terminu 2go i pokazuią ściany ich, bez których poznania nie uczyni ſię redukcya. Sciany te z samych znaków położonych przed terminami formuł pokazuią się. Jeśli wszyſtkie 3 ſą rzeczywiſte (obacz wykład wyrazów w § XV.) muſzą być dwie rzetelne, 3cia nie rzetelna równa tamtym obydwom, inaczéy drugi termin nie byłby wyrugowany. Są zaś wſzyſtkie 3 rzeczywiſte, kiedy termin 3ci ma przed ſobą znak —, czyli kiedy ieſt — p, iako w formule 1wſzéy i 2giéy; ſą 2 rzetelne a 1 nierzetelna, kiedy oſtatni termin ieſt z znakiem + czyli + q, iako w formule 1wſzéy, ſą 2 imaginaryyne, a 1 rzeczywiſta, kiedy ieſt $\mp$ q, iako ſię niżéy pokaże w p. IV. Ciężéy trochę poznać: czy rzeczywiſte ściany ſą ſobie równe i które ſą równe ſobie, tudzież czy ieſt iaka i która ieſt doſkonała, a która niedoſkonała. I. Ułatwiaiąc iednak te trudności i chcąc naprzód poznać równość ścian rzeczywiſtych, wziąć trzeba z któréykolwiek formuły terminy 3ci i oſtatni, to ieſt: px i q, i zrobiwſzy naprzód ſześciogran z 3ciéy części wſpółczynnika terminu 3go to ieſt z $\frac{1}{3}$p, potém czworogran z połowy terminu oſtatniego czyli z $\frac{1}{2}$q, zró-

wnać

wnać trzeba ieden z 2gim, a ieśli te będą ſobie równe i ściany ich być muſzą także równe. Niech będzie pomiar *np*: $x^3 - 12x + 16 = 0$, który maiąc oſtatni termin z znakiem $+$, mieć powinien dwie ściany rzetelne a iednę nierzetelną; chcąc więc poznać: czy tamte ſą ſobie równe, zakładam za terminy danego pomiaru terminy formuły 1wſzéy, będzie: $p = 12$, $q = 16$; więc ſześciogran z $\frac{1}{3}p$ będzie $\frac{1}{27}p^3$, a w liczbie biorąc $\frac{12}{3} = 4$; i wynoſząc do 3go ſtopnia, będzie: 64, czworogran zaś z $\frac{1}{2}q$ będzie: $\frac{1}{4}q^2$, a w liczbie z $\frac{16}{2}$ czyli z 8 będzie 64; aże $64 = 64$, ściany więc danego pomiaru rzetelne obie ſą ſobie równe, z których chcąc iednę wynaleść, dzielę tróykę oſtatniego terminu przez dwóykę wſpółczynnika terminu 3go, wieloraz pokaże ścianę ſzukaną to ieſt: $\frac{3q}{2p} = \frac{48}{24} = 2$.

Ponieważ zaś dwie ściany rzetelne ſą ſobie równe, toć kiedy iedna $= 2$, i 2ga musi być $= 2$, a 3cia nierzetelna tych ſummie równa musi być $= -4$, iako ſię wyżéy namieniło.

II. Chcąc zaś poznać: czy ściana nierzetelna doſkonałą ieſt lub nie, odciągam ilkość p od czworogranu bliſko większego, a przez reſztę dzielę q, ieśli wieloraz ten będzie ścianą rzeczonego czworogranu, będzie ścianą doſkonałą, inaczéy będzie niedoſkonałą. Daymy *np*: $x^3 - 39x + 70 = 0$ porównawſzy te terminy

ny z terminami formuły 1wſzéy, będzie: p = — 39, q = 70, czworogran bliſko większy od p czyli od 39 ieſt 49, od którego tamten odciągnąwſzy (odmieniaiąc znaki w ilkości odciążnéy podług Przep: Subtrakcyi) będzie —49 ✠ 39 = — 10, a przez tę reſztę dzielę q = 70, wieloraz —7 równy ścianie czworogranu rzeczonego pokazuje ścianę nierzetelną doſkonałą. III. Chcąc nad to poznać: która z rzetelnych ścian ieſt doſkonała, biorę czworogran bliſko mnieyſzy od p i odciągam go od p, a przez reſztę dzielę q, będzieli wieloraz ścianą wziętego czworogranu, tém ſamém będzie ścianą doſkonałą; a ieżli żaden taki nie znaydzie ſię czworogran, ściany będą niedoſkonałe. Tak w przykładzie wyżéy danym czworogran mnieyſzy od p czyli od 39 ieſt 36, ten odciągniony od tamtego daje reſztę = 3, przez którą podzielone q czyli 70 do wieloraz 23 ✠ $\frac{1}{3}$, który nie ieſt ścianą rzeczonego czworogranu, więc biorę ieſzcze mnieyſzy czworogran 25, który odciągnąwſzy od p. będzie 39 — 25 = 14, a przez tę reſztę podzieliwſzy q = 70, wieloraz 5 równy ścianie wziętego czworogranu będzie iedną z ścian doſkonałych rzetelnych *i. t. d.* IV. Chcąc nakoniec poznać, które między rzeczywiſtemi ścianami ſą imaginaryyne, uważam 3ci termin w ogólnéy formule wyrażony przez p, kto.., kiedy ma przed ſobą znak ✠, dwie ściany pewnie bę-

dą

dą imaginaryyne równie iako i wtenczas, kiedy ma wprawdzie znak —, ale $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}q^2$, czyli gdy ſześciogran z 3ciéy części terminu 2go mnieyſzy ieſt od czworogranu z połowy terminu oſtatniego, a wtenczas albo ta będzie formuła: $x^3 * + px \pm q = 0$, albo ta: $x^3 - px \pm q = 0$. Będą także ściany imaginaryyne, kiedy pomiar będzie czyſty czyli bez 2go i 3go terminu zgodny z tą formułą: $x^3 * * +$ lub $- q = 0$.

§ XXV. *O dokończeniu téyże redukcyi.*

Poznawſzy przez poprzedzający §: że w pomierze ſześciogrannym po części już zredukowanym znayduje ſię między imaginaryynemi choć iedna ściana rzeczywiſta doſkonała lub niedoſkonała, użyć można do dokończenia redukcyi iego iednego z tych ſpoſobów, które ſię w tym i naſtępującym §. wyłuſzczą. A naprzód można wziąć czworogran bliſko mnieyſzy lub większy od $\pm$ p czyli od terminu 3go (bierze ſię większy, gdy w danym pomierze ieſt — p czyli gdy 3ci termin ieſt odciążny, mnieyſzy zaś, gdy ieſt + p) i odciągnąwſzy go od — p, ieśli ſię wziął większy, lub dodawſzy do + p, ieśli mnieyſzy, przez reſztę lub ſummę podzielić q czyli termin oſtatni, wieloraz, będzieli równy ścianie czworogranu wziętego, będzie ścianą rzeczywiſtą danego pomiaru, a ścianą doſkonałą przez §

po-

poprzedzający, która dokończy redukcyi, gdyż przy roſtrrząſaniu warunków zagadnienia pokaże dorazu inne ściany w tymże pomierze zawarte, iako ſię da widzieć w naſtępujących dwóch przykładach: I. Niech będzie pomiar: $x^3 - 1x + 6 = 0$ zgodny z formułą $x^3 * - px + q = 0$, których porównawſzy terminy, będzie: $p = - 1$, $q = 6$, azatém, ponieważ $\frac{1}{27}p^3$ czyli ſześciogran z 3ciéy części wſpółczynnika terminu 3go mnieyſzy ieſt od $\frac{1}{4}q^2$ czyli od czworogranu połowy terminu oſtatniego, gdyż $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$, a $\frac{1}{4}q^2 = 9$ przez wzmiankowany §, ściany być muſzą dwie imaginaryyne, 3cia rzeczywiſta, któréy ſzukając biorę czworogran 4 bliſko więkſzy od p czyli od terminu 3go (gdyż $- p = - 1$) i odciągam go od $- p$ czyli $- 1$, odmieniwſzy znaki, a przez reſztę $- 3$ dzielę $q = 6$, wieloraz, który ieſt ścianą wziętego czworograu, będzie ścianą danego pomiaru rzeczywiſtą, odciążną wprawdzie, ale doſkonałą $= - 2$, która w roſtrząſaniu warunków pokaże inne imaginaryyne *i t. d.*

II. Niech będzie dany ieſzcze pomiar: $x^3 + 27x - 28 = 0$ zgodny z formułą $x^3 * + px - q = 0$ przez $+ p$ wyrażający dwie ściany imaginaryyne, a 3cią rzeczywiſtą, któréy ſzukając, biorę czworogran bliſko mnieyſzy 1, i dodaję go do $p = 27$, a przez ſummę $= 28$ dzielę $q = 28$, wieloraz $= 1$ ieſt ścianą wziętego czworogranu, azatém ścianą pomiaru rzeczywiſtą dodatną i doſkonałą. *i t. d.*

§ XXVI.

§ XXVI. Drugi ſpoſób znalezienia ściany rzeczywiſtéy, azatém zredukowania pomiaru ſześciogrannego iednę przynaymniéy ścianę doſkonałą w ſobie zawieraiącego ieſt ten: Maiąc *np.* pomiar: $x^3 + 12x = 427$, uważam: czy ſześciogran ilkości niewiadoméy x^3 mnieyſzy ieſt od ſześciogranu wiadoméy 427, czy też więkſzy. I. Jeżeli mnieyſzy, iaki ieſt w danym przykładzie (gdyż przenióſſzy 12x do 2giéy części, będzie $x^3 = 427 - 12x$, więc kiedy x^3 wraz z + 12x wyrównywało ilkości 427, toć ſamo x^3 musi być od niéy mnieyſze) wziąć trzeba ſześciogran nieco mnieyſzy od ilkości wiadoméy 427 *np*: ſześciogran 343, którego ściana = 7 i odciągnąć go od téyże ilkości wiadoméy, odciągaiąc razem i ſześcio-ilkości wiadoméy x^3 od x^3, z reſzty $12x = 84$ wypadnie ściana doſkonała $x = 7$ równa ścianie wziętego ſześciogranu. Oto wzór tego działania:

$$\begin{array}{l} x^3 + 12x = 427 \\ -x^3 \quad\quad - 343 \end{array} = 12x = 84, \text{czyli } x = \tfrac{84}{12} = 7.$$

II. Jeżeli zaś rzeczony ſześciogran więkſzy ieſt od ilkości wiadoméy w 2giéy pomiaru części położonéy, iaki ieſt w tym pomirze: $x^3 - 12x = 1584$ gdzié $x^3 > 1584$, bo $x^3 = 1584 + 12x$, wtenczas więkſzy od ilkości wiadoméy 1584 bierze ſię ſześciogran 1728, którego ściana = 12 i odciąga ſię tak ten ſześciogran wzięty od rzeczonéy ilkości,

iako

iakò ſześciogran niewiadoméy x^3 od x^3, reſzta, będzieli ścianą ſześciogranu wziętego, tém ſamém będzie ścianą pomiaru ſzukaną. Wzór działania:

$$\begin{array}{l} x^3 - 12x = 1584 \\ -x^3 \quad\; - 1728 \end{array} = -12x = -144.$$

Przenoſząc: $144 = 12x$, czyli: $x = \frac{144}{12} = 12$.

Przeſtroga 1. Gdyby w przykładzie iakim ſześciogran wzięty blisko mnieyſzy od ilkości wiadoméy i od niéy odciągniony nie dał reſzty ścianie ſwoiéy równéy, wtenczas bierze ſię ieſzcze mnieyſzy *i t. d. np:* maiąc: $x^3 + 27x = 28$, a biorąc ſześciogran 27 i odciągaiąc od 28, reſzta $= 1$ nie daie ściany 3 równéy ścianie wziętego ſześciogranu, gdyż wychodzi na $x = \frac{1}{27}$, więc bierze ſię ſześciogran ieſzcze mnieyſzy 8 i odciąga ſię od 28, lecz i ſtąd reſzta $x = \frac{20}{27}$ nie ieſt wziętego ſześciogranu ścianą $= 2$; zaczém naymnieyſzy ſię bierze 1, który odciągniony od 28 da ścianę ſzukaną, gdyż będzie:

$$\begin{array}{l} x^3 + 27x = 28 \\ -x^3 \qquad\; - 1 \end{array} = 27x = 27, \text{czyli } x = \frac{27}{27} = 1.$$

Przeſtroga 2. Kiedy pomiar ſześciogranny ieſt czyſty wyrażony tą formułą: $x^3 * * \pm q = 0$, zawiéra w ſobie dwie ściany imaginaryyne, a iednę rzeczywiſtą $= x - \sqrt[3]{q} = 0$, przez którą znalezioną w liczbach podzieliwſzy go zamieni ſię w czworogranny, o którego redukcyi mówiło ſię w § XVIII.

PRZY-

PRZYKŁADY ZAGADNIEN
I redukcyi pomiarów ſześciogrannych.

Zagadnienie 1wſze toż ſamo prawie, które było oſtatniém między przykładami Pomiarów czworogrannych w § XVIII.

Ociec umierający zoſtawił Synowi ſwemu intraty roczney Cz: Zł: 200, z któréy Opiekun, odkładając corok po 100 na wychowanie dziecięcia, drugie 100 zaraz na początku 1wſzego opieki roku dał na prowizyą, 2go zaś i 3ciego roku nie tylko rzeczone 100 dał na tęż prowizyą, lecz i prowizye od niego regularnie odbiérane. Po 3cim roku pokazało ſię zyſku, który powiększył Sieroty intratę od Oyca zoſtawioną, Czerw: Złł: 33 + $\frac{1}{10}$. Pytam, na iaką prowizyą wzmiankowane 100 Czerw: Zł: były dane?

Rezolucya Niech będzie prowizya niewiadoma od 100 = $\frac{100}{x}$ (czytay Rezolucyą z przypiſkiem wyżéy na K. 119) będzie taż prowizya w 2gim roku: $\frac{100}{x} + \frac{100}{x^2}$, w 3cim: $\frac{100}{x} + \frac{200}{x^2} + \frac{100}{x^3}$; azatém dodawſzy te trzyletnie niewiadome prowizye i zrównawſzy ie z wiadomym po trzech leciech zyſkiem, będzie pomiar ſześciogranny:

$$\frac{100}{x} + \frac{100}{x} + \frac{100}{x^2} + \frac{100}{x} + \frac{200}{x^2} + \frac{100}{x^3} = 33 + \frac{1}{10}$$

Czyli dodając terminy podobne: $\frac{300}{x} + \frac{300}{x^2} + \frac{100}{x^3}$ $= 33 + \frac{1}{10}$.

Skracając redukcyą tego pomiaru, która przez inne ſpoſoby byłaby i długa i trudna, wziąć można na domyſł ścianę, iaka naypodobniey-ſza do ułatwienia Zagadnienia tego zdawać ſię będzie, i w każdym terminie tegoż pomiaru założyć ią za x wynieſioną do iednegoż z niém ſtopnia, aieżeli po tém założeniu wypadnie 1wſza część pomiaru doſkonale równa 2giéy, ściana wzięta będzie zapytaną prowizyą, alboteż przez § XX. p. V. przenióſſzy 2gą część pomiaru do 1wſzéy i zrównawſzy ułożone porządnie terminy z 0, toż założy, wſzy za x na domyſł ścianę, iak piérwéy, ieżeli wſzyſtkie terminy zepſuią ſię, ściana wzięta będzie rzeczoną prowizyą. I tak 1-wſzym ſpoſobem będzie:

$$\frac{300}{10} + \frac{300}{100} + \frac{100}{1000} = 33 + \frac{1}{10} = 30 + 3 + \frac{1}{10} = 33 + \frac{1}{10}$$

w 2gim będzie: $\frac{1}{10} + 3 + 30 - 33 + \frac{1}{10} = 0$.

Jakoż ieżeli w 1wſzym roku od 100 prowizya: $\frac{100}{10} = 10$, będzie w 2gim: $\frac{100}{10} + \frac{100}{100} = 10 + 1$, a w 3cim: $\frac{100}{10} + \frac{200}{100} + \frac{100}{1000} = 10 + 2 + \frac{1}{10}$; co wſzyſtko uczyni: $33 + \frac{1}{10}$. C. B. D. R.

Za-

Zagadnienie 2gie 1wszemu podobne: Daje kto towarzystwu kupieckiemu na handel summę 1000 Cz: Zł: z warunkiem: żeby mu taż summa we trzy lata oddana była nie tylko z prowizyą od kapitału, ale też z prowizyą od samych prowizyy, czyli, iak nazywaią, z lichwą. Przyięty warunek, a summa we trzy lata oddana pokazała się większą od danéy 331 Cz: Zł. Pytam, na iaką od sta prowizyą rzeczona summa była dana?

Rezolucya naykrótsza taż sama, co poprzedzaiącego Zagad: Prowizya niewiadoma w 1wszym roku $\frac{1000}{x}$, w drugim: $\frac{1000}{x} + \frac{1000}{x^2}$, w 3cim: $\frac{1000}{x} + \frac{2000}{x^2} + \frac{1000}{x^3}$, a te prowizye w iednę summę zebrane i z ogólnym zyskiem zrównane dadzą pomiar:

$$\frac{3000}{x} + \frac{3000}{x^2} + \frac{1000}{x^3} = 331.$$

Zakładaiąc w nim 10 za x, będzie: $\frac{3000}{10}$ $+ \frac{3000}{100} + \frac{1000}{1000} = 331.$

Redukuiąc frakcye: $300 + 30 + 1 = 331$ *i t. d.* C. B. D. R.

Zagadnienie 3cie tož ſamo, które był 9tém między czworogrannemi, ale tu do 3go ſtopnia podnieſione. Pewny Kapitaliſta dał Kupcowi do 3 lat ſummę Cz: Zł: 10,000 na procent umówiony, po 3 leciech upłynionych gdy kupiec zbankrutował, cały majątek ſwóy prawem przyciśniony oddać musiał kredytorom *in potioritatem*, ſkąd na wzmiankowanego kapitaliſtę nie przypadło tylko 7,210 Czer: Zł: Traci więc ogólnie na kapitale ſwoim 2,710 Czer: Zł: Pytam: ile na ſtu traci?

Rezolucya mogłaby bydź ta ſama, co poprzedzających Zagadnień; ale poſtąpmy już od tego Mechanicznego do prawdziwie Algebraicznych rezolwowania ſpoſobów trudnieyſzych wprawdzie i dłuższych, aletež nierównie pewnieyſzych. Założywſzy za ſtratę niewiadomą x, ſzukać iéy na każdy rok trzeba tak, iak wyżéy w Rezolucyi tego ſamego Zagadnienia między przykładami czworogrannych; będzie po 1wſzym roku rzeczona ſtrata $= -100x$; po 2gim $= -100x + x^2$; po 3cim $= -100x + 2x^2 - \frac{x^3}{100}$; a te ſtraty w iednę ſummę zebrawſzy i z ogólną ſtratą zrównawſzy, wypadnie pomiar ſześciogranny:

$$-3000 + 3x^2 - \frac{x^3}{100} = -2710.$$

Czyli

Czyli przez § XVI: $\frac{x^3}{100} - 3x^2 + 300x - 2710 = 0.$

Gubiąc frakcye, będzie: $x^3 - 300x^2 + 30000x - 271000 = 0.$

Rugując zaś termin 2gi przez § XXII, czyli zmnieyszając ścianę pomiaru liczbą 100, będzie:

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 & = y^3 + & 300y^2 + & 30000y + & 1000000 \\ -300x^2 & & -300y^2 - & 60000y - & 3000000 \\ +30000x & & & +30000y + & 3000000 \\ -271000 & & & & -271000. \\ \hline \text{Summa: } & y^3 \cdot & * & * & + 729000 = 0 \end{array}$$

Gdzie, ponieważ rugując 2gi termin, zginął i 3ci, przeto pomiar sześciogranny zamienił się w czysty, dlatego pozostały termin iego ostatni z dwoma znakami położony, którego ściana znaydzie się przez Przestr: 2. §. XXV, wyciągając ią osobno z y^3, a osobno z 729000, będzie przez § V. i XIII. $y = - 90$. Ale, że rugując 2gi tego pomiaru termin, zmnieyszyła się ściana iego liczbą 100, a dla wyrugowanego z 2gim razem i 3ciego terminu nie przyszło użyć innych sposobów redukowania tegoż pomiaru, a tém samém powiększenia ściany zmnieyszonéy, więc ią teraz powiększyć należy tąż samą liczbą, którą przedtém była zmnieyszona, będzie więc $y = - 90 + 100 = 10$ *i t. d.*

Zaga-

Zagadnienie 4te. Maiąc daną ſummę dwóch ſześciogranów i przewyſzkę boków czyli ścian, iak wynaleść ſame ściany?

Rezolucya 1. Niech będzie ſumma dwóch ſześciogranów $= 2a$, ściany niewiadome $= 2x$, tych przewyſzka wiadoma $= 2b$, będzie ściana większa: $x + b$, mnieyſza: $x - b$, ſześciograny z tych ścian pojedyńczo zrobione i zebrane w iednę ſummę dadzą pomiar ſześciogranny: $2x^3 + 6b^2x = 2a$.

Czyli przez § XVII. $x^3 + 3b^2x = a$.

Czyli przez tenże §: $x^3 + 3b^2x - a = 0$.

Daymy iuż: że $a = 14$, $b = 1$, założywſzy te ceny za litery, zamieni ſię oſtatni pomiar w ten: $x^3 + 3x - 14 = 0$, który zgadza ſię z formułą $x^3 * + px - q = 0$; zrównawſzy więc iego terminy z téy terminami, będzie $p = 3$, $q = 14$, a przez § XXV, wziąwſzy czworogran 4 bliſko większy od $p = 3$ i ten do wziętego dodawſzy będzie $4 + 3 = 7$, przez które podzieliwſzy $-q = -14$, wie- loraz -2 będzie ścianą wziętego czworogranu 4, a razem ścianą pomiaru ſzukaną, to ieſt będzie: $x - 2 = 0$, czyli $x = 2$. Więc podług warunków Zagadnienia ściana większa $x + b = 2 + 1 = 3$, mnieyſza zaś $x - b = 2 - 1 = 1$, ſześciogran 1wſzéy: $3 \times 3 \times 3 = 27$, 2giéy: $1 \times 1 \times 1 = 1$, a ſumma ſześciogranów $2a = 28$. C. B. D. R.

Rezolucya 2. *krótſza przez* § *XXVI.* Maiąc zredukowany i do formuły obrócony pomiar

$x^3 +$

$x^3 + 3x - 14 = 0$, ſzukam ſześciogranu bliſko mnieyſzego od 14, którym ieſt 8, i odciągam go od 14, a razem odciągam ſześciogran ilkości niewiadoméy x^3 od x^3, zoſtanie: $3x - 6 = 0$, czyli $x = \frac{6}{3} = 2$, iak wyżéy.

Zagadnienie 5te. Maiąc daną ſummę dwóch ſześciogranów i proſtokąt czyli rektanguł z ich ścian zrobiony, iak znaleść ściany danych obydwóch ſześciogranów?

Rezolucya. Niech będzie ſześciogranów ſumma $= 2a$, proſtokąt z ścian zrobiony $= 2b$, ściana jedna $= x$, druga $= y$, wyydą z warunków zagadnienia te dwa pomiary:

1wszy: $x^3 + y^3 = 2a.$

2gi: $xy = 2b$, czyli dzieląc: $y = \frac{2b}{x}$.

Z których 2gi wynoſząc do 3ciego ſtopnia, będzie przez § II: $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$; tę zaś cenę zakładając za y^3 w pomierze 1wſzym, będzie:

$x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a$; gdzie gubiąc frakcyą czyli przez x^3 mnożąc 1wſzy i oſtatni pomiaru termin, będzie: $x^6 + 8b^3 = 2ax^3$, czyli $x^6 - 2ax^3 = -8b^3$. Ten iuż pomiar lubo zdaie ſię być ſześcioſtopniowym, w ſaméy rzeczy nie ieſt tylko czworogrannym naciąganym przez § XVII. Wſzakże założywſzy w nim z

za x^3

za x^3, zamieni się dorazu w ten czworogranny: $z^2 - 2az = -8b^3$. Daymy iuż: że $2a = 72$, $2b = 8$, toć $b = 4$; $b^3 = 64$, $8b^3 = 512$, więc zakładaiąc liczby za litery, będzie pomiar: $z^2 - 72z = -512$, który redukując przez § XVIII. to ieſt: *naprzód* dopełniaiąc go przydatkiem do obydwóch części czworogranu zrobionego z połowy wſpółczynika terminu 2go, będzie:

$$z^2 - 72z + 1296 = -512 + 1296.$$

Czyli: $z^2 - 72z + 1296 = 784$.

Powtóre: Wyciągaiąc ścianę czworogranną z 1wſzéy części przez § VI. z 2giéy zaś przez § XI, będzie $z - 36 = 28$ czyli: $z = 28 + 36 = 64$. Lecz z założone było za x^3, będzie więc $x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64}$, albo ścianę wyciągnąwſzy przez § XIII. $x = 4$, a kiedy $x = 4$, toć $y = \frac{2b}{x} = \frac{8}{4} = 2$. C. B. D. R.

Zagadnienie 6ſte: Maiąc dwie linije proſte, piérwſzą z nich tak pociągnąć, żeby drugiéy czworogran do czworogranu części pociągnionéy równy czyli ten ſam wzgląd miał, co część pociągniona do całéy proſtéy.

Rezolucya. Niech będą dane linije proſte b i a, pociągnąwſzy linii b, część pociągniona będzie $= x$, więc cała proſta $= b + x$, azatem podług warunków zagadnienia pomiar wypadnie w proporcyi Geometrycznéy: $a^2 . x^2 :: x . b + x$.

Czyli

Czyli przez Zadan: 4. Rozdz: 3. Części 1. $x^3 = a^2b + a^2x$.

Czyli przez § XVI : $x^3 - a^2x - a^2b = 0$. Daymy iuż : że $a = 2$, $b = 12$, założywſzy liczby za litery, pomiar zamieni ſię w ten: $x^3 - 4x - 48 = 0$; a ten zredukowawſzy przez § XXV. albo XXVI, będzie : $x = 4$. Albowiem redukując przez § XXV, biorę czworogran 16 większy od 4 wſpółczynnika 2go terminu, i odciągam 4 od 16, a przez reſztę 12 dzielę -48, wieloraz -4 będąc ścianą wziętego czworogranu, ieſt oraz ścianą pomiaru ſzukaną, więc $x - 4 = 0$, czyli $x = 4$.

Redukując zaś przez § XXVI. pomiar tak obrócony $x^3 - 4x = 48$, ponieważ w nim ſześciogran niewiadoméy ilkości x^3 większy ieſt od ſześciogranu wiadoméy 48, więc wziąwſzy ſześciogran 64 i odciągnąwszy go od 48, a razem odciągnąwſzy x^3 od x^3, będzie :

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x = 48 \\ -x^3 \qquad -64 \\ \hline \end{array} = -4x = -16 = x = \tfrac{16}{4} = 4.$$

Już ieżeli $x = 4$, toć $x + b = 4 + 12 = 16$; Więc iako : $a^2 . x^2 : : x . b + x$, tak też : $4 . 16 : : 4 . 12 + 4$. C. B. D. R.

Zagadnienie 7me. Wynaleść trzy liczby Arytmetycznie równowzględne czyli proporcyonalne, których przewyſzka, *differentia*, i miąſzość, *ſolidum*, ſą dane.

Rezolucya. Przewyſzka trzech liczb wzmiankowanych niech będzie $= d$, miąſzość $= m$, liczby niewiadome 1wſza $= x$, 2ga $= x + d$,

3cia =

3cia $= x + 2d$, gdyż Arytmetycznie mają być proporcyonalne; miąſzość zaś, mnożąc naprzód x przez $x + d$, potém produkt: $x^2 + dx$ przez $x + 2d$, będzie: $x^3 + 3x^2d + 2xd^2$, azatém pomiar:

$$x^3 + 3x^2d + 2xd^2 = m.$$

Rugując termin 2gi przez § XXII. czyli biorąc $x = y - d$ i cenę tę wynieſioną do jednychże z x ſtopniów zakładając za x w danym pomierze, będzie:

$$\begin{array}{l|lllll} x^3 & = y^3 & - 3y^2d & + 3yd^2 & - d^3 & \\ + 3x^2d & & + 3y^2d & - 6yd^2 & + 3d^3 & \\ + 2xd^2 & & & + 2yd^2 & - 2d^3 & \\ \hline \textit{Summa:} & y^3 & * & - yd^2 & * & = m. \end{array}$$

Daymy już: że $d = 3$, $m = 28$, założywſzy te liczby za łitery, będzie pomiar: $y^3 - 9y = 28$, a ten łatwo ſię zredukuie przez § XXVI. Ponieważ bowiem $y^3 > 28$, biorąc więc 64 ſześciogran większy od 28 i odciągając tamten od tego równie iako i y^3 od y^3, a reſztę redukując będzie:

$$\begin{array}{l} y^3 - 9y = 28 \\ -y^3 \quad\;\; - 64 \\ \hline \end{array} = -9y = -36 = y = \tfrac{36}{9} = 4.$$

Lecz $x = y - d$, toć $x = 4 - 3 = 1$; gdy więc z liczb Arytmetycznie proporcyonalnych 1wſza ieſt 1, druga 4, toć przewyżſzka ieſt 3, azatém 3cia z tychże liczb będzie 7. Wſzakże $1 \times 4 \times 7 = 28$ C. B. D. R.

Za-

Zagadnienie 8*me*. Liczbę 10 podzielić na 4 części Geometrycznie proporcyonalne tak, żeby mnożąc 1wſzą przez 8, 2gą przez 4, 3cią przez 3, 4tą przez 1, ſumma tych produktów uczyniła 16.

Rezolucya. Niech będzie liczby danéy część iedna $= x$, proporcyi zaś Geometrycznéy mianownik $= y$, będzie z 1wſzego warunku zagadnienia pomiar: $x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$, Z 2go zaś warunku będzie 2gi pomiar: $8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3 = 16$.

W obudwóch wziąwſzy cenę ilkości x, będzie w 1wſzym: $x = \frac{10}{1 + y + y^2 + y^3}$, w 2gim: $x = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$; a te ceny przez §XVII. zrównawſzy z ſobą czyli ułożywſzy w ieden pomiar, będzie:

$$\frac{10}{1 + y + y^2 + y^3} = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}.$$

Gubiąc frakcye, to ieſt: przez mianownika 1wſzéy mnożąc licznika 2giéy i naodwrót przez 2giéy mianownika mnożąc licznika 1wſzéy będzie *naprzód*: $10 = \frac{16 + 16y + 16y^2 + 16y^2}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$

Powtóre: $80 + 40y + 30y^2 + 10y^3 = 16 + 16y + 16y^2 + 16y^3$.

Czyli

Czyli przez § XVI. $16y^3 + 16y^2 + 16y + 16 - 10y^3 - 30y^2 - 40y - 80 = 0$. Redukując zaś terminy podobne, zostanie: $6y^3 - 14y^2 - 24y - 64 = 0$. Dzieląc przez 6, będzie: $y^3 - \frac{14}{6}y^2 - 4y - \frac{64}{6} = 0$, czyli: $y^3 - \frac{7}{3}y^3 - 4y - \frac{32}{3} = 0$.

Gubiąc frakcye przez § XXIII. sposobem 2gim, będzie:

$$y^3 - \frac{7}{3}y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$$

1\. 3. 9. 27.

$$y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$$

A ten pomiar ponieważ da się podzielić bez reszty przez $y - 12$ (§ XVII p. V.) wypadnie z podziału takiego pomiar czworogranny: $y^2 + 5y + 24 = 0$, więc 12 z przeciwnym znakiem iest ścianą pomiaru sześciogrannego przez § XX. p. V. Lecz że dla zgubienia frakcyi ściana tegoż pomiaru rozmnożona była przez progressyą Geometryczną maiącą za mianownika 3, zaczém i ściana wynaleziona 12 iest we troje większa od ściany prawdziwéy tegoż pomiaru, przeto podzielić ią należy przez 3, wieloraz da ścianę dotąd szukaną = 4, którą założywszy za x w cenie iego któréykolwiék ze dwóch wyżéy położonych, wypadnie część 1wsza liczby 10 zapytana, gdyż będzie: Jak w 1wszéy: $x = \frac{10}{1 + 4 + 16 + 64} = \frac{10}{85} = \frac{2}{17}$.

Tak

Tak i w 2giéy $x = \frac{16}{8 + 16 + 48 + 64}$ $= \frac{16}{136} = \frac{2}{17}$.

Część tedy 1wſza rzeczonéy liczby $= \frac{2}{17}$, więc 2ga $= \frac{8}{17}$, 3cia zaś $= \frac{32}{17}$, nakoniec 4ta $= \frac{128}{17}$, gdyż $\frac{2}{17} \times 4 = \frac{8}{17}$, $\frac{8}{17} \times 4 = \frac{32}{17}$, $\frac{32}{17} \times 4 = \frac{128}{17}$, a tych części ſumma $\frac{170}{17} = 10$.

Gdyby zaś każda z tych części rozmnożona była przez liczby warowane, ſumma produktów z mnożenia tego wypadłych byłaby $=$ 16, gdyżby było: $\frac{2}{17} \times 8 = \frac{16}{17}$; $\frac{8}{17} \times 4 = \frac{32}{17}$; $\frac{32}{17} \times 3 = \frac{96}{17}$; $\frac{128}{17} \times 1 = \frac{128}{17}$; a ſumma: $\frac{272}{17} = 16$. C. B. D. R.

ROZDZIAŁ VII.

O Rachunku ściennym czyli Radykalnym.

Z tego, co ſię dotąd przekładało, można dochodzić, co to ieſt zarachunek i do czego przydatny. Ale jego zdatność okaże ſię lepiéy w Rozdziale oſtatnim, dla którey przed nim ſię kładzie, bo dla innych beſpiecznie mógłby być opuſzczony; dlaczego treść tylko iego i przednieyſze działania iak naykrócéy będą tu dotknięte.

§ XXVII. *Rachunek ten bawi ſię około ſtopniów niedoſkonałych, o których wiedzieć potrzeba:*

I. Ze niedoſkonałym ſtopniem, *potentia imperfecta, ſurda, irrationalis*, nazywa ſię ilkość

kość, z któréy ściany całéy wyciągnąć nie można, i od znaku tęż ścianę wyrażającego nazywa ſię ściennym czyli radykalnym, a wyraża ſię iednym z tych ſpoſobów: $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt[4]{(a-b)}$; gdzie znak każdy ścienny albo wyraźnego ma wykładnika 3, 4 *i t. d.* albo domniemanego 2, iako $\sqrt{a}$, które to wykładniki w porównywaniu ilkości ściennych iednych z drugiemi nazywają ſię mianownikami ich, o czém w § naſtępującym.

II. Liczba lub litera przed znakiem ściennym położona nazywa ſię przedznaczną, *extra ſignum*, iaką ieſt 2 w ilkości ściennéy: $2\sqrt{3}$, a w ilkości: $a\sqrt[4]{b}$, a gdzie wyraźnéy nie maſz, tam domniemaną będzie 1. Jlkość zaś pod tymże znakiem położona, nazywa ſię podznaczną, *ſub ſigno*, iako 3 i b w danych przykładach. Zeby przedznaczna ilkość położyć ſię mogła pod znakiem, wynieść ſię powinna do tego ſtopnia, który wyrażony ieſt przez wykładnika ściennego, i rozmnożyć ſię przez ilkość podznaczną, tak *np:* $2\sqrt[3]{3}$, będzie: $2\times2\times2 = 8\times3 = \sqrt[3]{24}$. Jlkość zaś podznaczna iednego z znakiem ściennym wykładnika mająca nie może ſię inaczéy przed znakiem położyć tylko wyciągnąwſzy z niéy ścianę; ta ſię położy przed znakiem ściennym, a reſzta zoſtanie pod nim; tak $\sqrt[3]{ab^3}$ będzie: $b\sqrt[3]{a}$, *i t. d.*

III. Jlkość odciążna położona pod znakiem ściennym, którego wykładnikiem ieſt liczba parzyſta *np*: ta: $\sqrt[2]{-a}$, lub ta: $\sqrt[4]{-a}$, nazywa ſię imaginaryyną czyli niepodobną, gdyż niepodobna ieſt z tych ſtopniów ścianę wyciągnąć, iako ſię namieniło w Przeſtr: 2. § XV.

IV. Dwie ilkości ścienne nazywają ſię wſpółmiernemi czyli mogącemi ſię pomierzyć, *commenſurabiles*, które pod iednakiém znakiem ściennnym mają też ſamą literę albo liczbę, i przedznacznemi ſię tylko różnią, takie ſą: $3\sqrt{5}$ i $2\sqrt{5}$, $a\sqrt{b}$, i $c\sqrt{b}$ *i t. d.*

§ XXVIII. *Jak ścienne ilkości obrócić do iednego mianownika?*

Ponieważ tych ilkości ani dodawać, ani odciągać, ani nawet mnożyć i dzielić nie można, ieśli tego ſamego mianownika czyli wykładnika ściany nie mają, przeto, gdy ſą dane z różnym mianownikiem, do jednego ie obrócić trzeba, zoſtawując ilkości przedznaczne, iak były, a te tylko, które ſą pod znakiem, redukując iednym ze dwóch ſpoſobów:

I. Mając *np*: $\sqrt{a}$ i $\sqrt[3]{b}$, czyli (przez Wykład III. Rozdz: I.) $a^{\frac{1}{2}}$ i $b^{\frac{1}{3}}$, trzeba *naprzód*: wykładników tych łomanych $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ obrócić do iednego mianownika podług Reguł Arytmet: będzie: $\frac{3}{6}$ i $\frac{2}{6}$; *powtóre*: wynieść ilkość a do 3go, b zaś do 2go ſtopnia, iak te nowe wykładniki ſame pokazują, toż wynieſione a^3, b^2 pod znakiem ściennym położyć, a w znaku ſa-

mym

mym iednegoż ich mianownika 6, będą ilkości rzeczone obrócone do iednego mianownika $\sqrt[6]{a^3}$ i $\sqrt[6]{b^2}$.

II. Jeżeli wykładnik iednéy ściany bez reszty dzieli 2go, ilkości ścienne krócéy się obrócą do iednego mianownika *np*: mając: $\sqrt[2]{c}$ i $\sqrt[6]{a}$, ponieważ 6 przez 2 spełna się dzieli, więc podzieliwszy, wieloraz 3 pokaże naprzód: że ilkość pod 1wszym znakiem położona, wynieść się powinna do 3ciego stopnia c^3, potém: że wykładnik iéy 2 przez toż 3 rozmnożony będzie wykładnikiem czyli mianownikiem wspólnym obojéy ściany, azatém będzie: $\sqrt[6]{c^3} + \sqrt[6]{a}$ *i t. d.*

§ XXIX. *Ilkości ścienne iak się redukują, czyli na prostsze obracają?*

Uważać trzeba: co za mnożyciele są ilkości pod znakiem ściennym położonych, z tych będzieli który wyniesiony do tego samego stopnia, który iest w znaku ściennym, wyciągnioną z niego ścianę położyć przed znakiem, a resztę zostawić na swoiém mieyscu. Niech będzie *np*: ilkość $\sqrt[n]{a^m b^n}$, któréy ilkości podznaczne a^m, b^n są dwa mnożyciele, *factores*, z których rozmnożenia wypadł produkt $a^m b^n$; z tych 2gi b^n pojedyńczo wzięty iednegoż ma wykładnika z znakiem ściennym; wyciągnąwszy

wszy więc z b^n ścianę czworogranną b i przed znakiem położywszy, a resztę to iest a^m zostawiwszy pod znakiem, będzie: $b\sqrt[n]{a^m}$ ilkość zredukowana czyli na prostszą obrócona.

Niech będzie ieszcze ilkość ścienna w liczbie *np:* $\sqrt[3]{24}$, któréy mnożyciele są 8 i 3, a z tych 1wszy iest tym samym stopniem, który wyraża $\sqrt[3]{}$; wyciągnąwszy więc z 8 ścianę sześciograną 2 i przed znakiem położywszy, a 2giego mnożyciela 3 zostawiwszy pod znakiem, będzie: $2\sqrt[3]{3}$ na prostszą obrócona, ale téyże saméy ceny, co i 1wsza *i t. d.*

Przestroga. Mnożycielów wzmiankowanych nie trudno znaleść, dzieląc liczbę podznaczną przez 2, 3, 4 *i t. d.* Który bowiem dzielnik rzeczoną liczbę bez reszty podzieli, ten będzie iednym mnożycielem, a wieloraz drugim. Lecz któréy ilkości znaleść nie można mnożycielów takich, żeby ieden z nich wyniesiony był do stopnia przez znak ścienny wyrażonego; ta nie może się na prostszą obrócić. Co żeby tym łatwiéy poznać, zrobić trzeba z ilkości podznacznych frakcyą, ta zredukowana pokaże mnożycielów *np:* mając $\sqrt{8}$ i $\sqrt{18}$, a 8 i 18 obracając na $\frac{8}{18}$, czyli na $\frac{4}{9}$; będzie 4 iednym, a 9 drugim mnożycielem, a obadwa czworogrannemi, iako oczywista.

§ XXX. *Dodawanie i odciąganie ilkości ściennych.*

Obróciwszy ilkości ścienne na prostsze przez §. poprzedz: uważać należy: czy są wspołmierne, czy nie.

I. Jeżeli są wspołmierne czyli też samą ilkość podznaczną maiące, ta się na swojém mieyscu zostawuje, a przedznaczna dodaie się lub odciąga sposobem zwyczaynym, i summa lub reszta kładzie się znowu przed znakiem ściennym *np*: maiąc $\sqrt{50}$ i $\sqrt{18}$, i redukując na prostsze, będą: $5\sqrt{2}$ i $3\sqrt{2}$, dodaiąc $5+3$, będzie summa $= 8\sqrt{2}$, odciągaiąc $5-3$, będzie reszta $= 2\sqrt{2}$.

II. Jeżeli zaś nie są wspołmierne, dodanie ich i odciągnienie zwyczaynemi znakami $+$ i $-$ wyraża się. Dwa te przepisy służą składanym nawet ilkościom ściennym. Co się daie widzieć w tym przykładzie, w którym terminy ścienne dodaią się jednoznaczne, a różnoznaczne odciągaią.

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{6}. \\ 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{6}. \\ \hline 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}. \end{array}$$

§ XXXI. *Mnożenie i dzielenie tychże ilkości.*

I. Obrócone do iednego mianownika przez § XXVIII. ilkości ścienne osobno przedznaczne a osobno podznaczne mnożą się za wzór pospolitych, a produkta piszą się z tymże samym znakiem ściennym tak, iak mnożyciele

byly

były napisane *np:* mnożąc $5\sqrt{3}$ przez $4\sqrt{2}$, będzie: $5 \times 4 = 20$, $3 \times 2 = 6$, azatém produkt $= 20\sqrt{6}$: podobnym sposobem mnożąc $m\sqrt[3]{a}$ przez $n\sqrt[3]{a}$, będzie: $mn\sqrt[3]{a^2}$. Kiedy zaś trafi się ilkość ścienną mnożyć przez doskonałą, trzeba tę wprzód do iednego z tamtą mianownika obrócić, a dopiéro mnożyć, iak wyżéy. Zgoła byle iednego mianownika miały rzeczone ilkości czy pojedyńcze, czy składane z samych ściennych lub częścią z ściennych, częścią doskonałych terminów; do mnożenia onych dosyć na tym przepisie: aby się zosobna mnożyły doskonałe przez doskonałe, a ścienne przez sobie podobne, pamiętając o regułach w Części I. na znaki $+$ i $-$ danych, dla których terminy podobne psować się zwykły, a w terminach produktu redukcyą czyniąc, gdzie można przez §. XXIX.

II. Co się tycze dzielenia, uważać trzeba ilkości ścienne czy są wspólmierne, czy nie. Sąli wspólmierne, podzieliwszy przedznaczne, wieloraz da ilkość doskonałą, tak *np:* $6\sqrt{3}$ dzieląc przez $3\sqrt{3}$, wieloraz będzie $= 2$. Albowiem dwie te przedznaczne ilkości 6 i 3 kładąc pod znakiem przez § XXVI. p. II. będzie 1wsza: $6\sqrt{3} = \sqrt{108}$, 2ga: $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$; dzieląc zaś $\sqrt{108}$ przez $\sqrt{27}$, czyli $\frac{108}{27}$, wieloraz będzie: $\sqrt{4} = 2$. Jeżeli zaś nie są wspólmierne, tedy osobno dzielą się przedznaczne, osobno podznaczne, *np:* $6\sqrt{ab}$

dzieląc przez $2\sqrt{a}$, będzie: $\frac{6}{2}$ i $\frac{ab}{a} = 3\sqrt{b}$.

Naoſtatek: chcąc dzielić ilkość ścienną przez doſkonałą lub przeciwnie, obrócić wprzód trzeba doſkonałą do iednego mianownika z ścienną, dopiéro dzielić podług danych przepiſów *np:* chcąc podzielić a przez $\sqrt[3]{ab}$, wynoſzę a do 3go ſtopnia, będzie: $\sqrt[3]{a^3}$, toż dzielę a^3 przez ab, wypadnie wieloraz $= \frac{aa}{b}$.

Okazanie ogólnego ſpoſobu mnożenia i dzielenia.

I. Mnożąc ilkość ścienną *np:* $\sqrt{3}$ przez $\sqrt{2}$, produkt musi być $= \sqrt{6}$. Albowiem z iſtoty mnożenia 1 tak ſię ma do liczby mnożącéy, iak mnożna do produktu, który nazywam p, to ieſt: w przykładzie danym: $1.\sqrt{2} : : \sqrt{3}.p.$ taż proporcya ieſt i między czworogranami tych ſamych terminów to ieſt: $1.2 : : 3.p^2$. A że $1.2 : : 3.6$; więc iak $p^2 = 6$, tak i $p = \sqrt{6}$. Dzieląc zaś *np:* $\sqrt{15}$ przez $\sqrt{3}$, wielorazem być musi $\sqrt{5}$; gdyż z iſtoty dzielenia tak ſię ma dzielnik do liczby podzielnéy, iak 1 do wieloraza, który niech będzie $=$ q, co także i czworogranom ſłuży, to ieſt: iako $\sqrt{3}.\sqrt{15} : : 1.q.$ tak: $3.15 : : 1.q^2$. A że $3.15 : : 1.5.$ więc iak $q^2 = 5$, tak i $q = \sqrt{5}$. C.B.D.O.

§. XXXII. *Wynieść ilkość ścienną do danego ſtopnia.*

I. Jlkość ścienna mająca ſię wynieść do danego ſtopnia albo ieſt podznaczna, albo częścią

ścią przedznaczna częścią podznaczna; ieżeli tylko podznaczna, ſama ſię do ſtopnia danego wynosi bez odmiany znaku ściennego i iego wykładnika *np:* $\sqrt[3]{a}$ wynieſiona do 3go ſtopnia będzie $\sqrt[3]{a^3}$, ieżeli zaś częścią przedznaczna, częścią podznaczna, tak ta iako i tamta do danego ſtopnia wynieść ſię powinna *np:* $a\sqrt[3]{b}$ wynieſiona do 2go ſtopnia będzie $a^2\sqrt[3]{b^2}$. II. Co ſię tycze ilkości ściennych ſkładanych, te ſię wynoſzą do wyżſzych ſtopniów tak, iak doſkonałe, zachowując Przepiſy na mnożenie dane w §. poprzedzającym *i t. d.*

§ XXXIII. *Wyciągnąć ścianę czworogranną z ilkości ściennéy.*

I. Wyciągać ścianę z ilkości ściennych wyżſzą nad 2gi i 3ci ſtopień nie zdarza ſię z przyczyny: że ilkości wyżſze nad rzeczone ſtopnie w redukcyi pomiarów do 2go poſpolicie albo do 3go ſtopnia obracają ſię, przeto z tych tylko ſtopniów ścian wyciągania potrzeba czaſem wynika. Co ſię więc tycze czworogrannéy, mając ią wyciągnąć *np:* z $\sqrt{a}$, ponieważ przez § I. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, wykładnika tego $\frac{1}{2}$, podzieliwſzy przez wykładnika ſtopnia danego także $\frac{1}{2}$, wieloraz da ścianę czworogranną: $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$; azatém, ponieważ ułomki dzielą ſię przez mnożenie, do wyciągnienia ściany takiéy doſyć bę-

będzie przez wykładnika ściany danéy rozmnożyć wykładnika ilkości ściennéy.

II. Mając wyciągać tęż ścianę z ilkości dwukrótnéy *np:* z téy : $7 + \sqrt{48}$, odciąga się naprzod 48 od 49 to iest : od czworogranu 1-wszego terminu 7, potém z przewyszki ich $=1$ wyciąga się ściana czworogranna $= 1$, a ta dodana do terminu doskonałego 7 uczyni 8, odciągniona od niego, uczyni 6 ; któréyto summy i przewyszki połowa to iest : 4 i 3 będzie ścianą czworogranną danéy dwukrótnéy ilkości $= \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$. Podobnie wyciągając tęż ścianę z ilkości dwukrotnéy : $a + b - 2\sqrt{ab}$, odciąga się od czworogranu 1wszego terminu $a+b$, toiest : od $a^2 + 2ab + b^2$ czworogran terminu 2go — $2\sqrt{ab}$ to iest : $4ab$ przez § XXVII. p. II; będzie przewyszka: $a^2 - 2ab + b^2$, którey ściana czworogranna iest : $a-b$, tę dodawszy do terminu doskonałego $a+b$, będzie summa $2a$, odciągnąwszy od niego, będzie reszta $2b$; a połowa téy summy i reszty będzie ścianą szukaną $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Okazanie. Biorąc za przykład dopiéro znalezioną ścianę $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ i wynosząc ją do 2go stopnia przez § przedostatni, będzie : $a + b - 2\sqrt{ab}$ ilkość dwukrotna, która dana była, w któréy dają się widzieć dwa terminy doskonały i ścienny, 1wszy zawierający summę ścian $a + b$, 2gi dwoisty produkt tychże ścian $2\sqrt{ab}$. Odciągnąwszy więc czworogran

2go

2go terminu = 4ab od czworogranu 1wſzego terminu doſkonałego = $a^2 - 2ab + b^2$, reſzta = $a^2 - 2ab + b^2$ będzie także czworogranem ściany a — b, więc przewyszką tych dwóch czworogranów ieſt a — b, która dodana do ich ſummy a + b uczyni 2a to ieſt: dwóykę czworogranu ściany $\sqrt{a}$, odciągniona zaś od téyże ſummy uczyni 2b czyli dwóykę czworogranu 2giéy ściany $\sqrt{b}$, azatém połowy ich a i b daią terminy ściany ſzukanéy $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ C. B. D. O. Skąd ſię pokazuje: iż do wyciągnienia ściany czworogranńéy z dwukrotnéy ilkości ściennéy trzech warunków potrzeba I. żeby rzeczona ilkość nie z ſamych terminów ściennych ſkładała ſię, ale żeby ieden z nich był doſkonały, II. żeby termin doſkonały azatém i czworogran iego był większy od ściennego, iżby ſię ten od tamtego mógł odciągnąć, III. żeby przewyſzka czworogranów zrobionych z terminów doſkonałego i ściennego była także czworogranem, inaczéy z danéy ilkości nie wyciągnie ſię ściana czworogranna.

§ XXXIV. *Wyciągnąć ścianę ſześciogranną z ilkości ściennéy trzecioſtopniowéy.*

Redukcye pomiarów ſześciogrannych i innych wyższoſtopniowych na ſześciogranne obrotnych kończą ſię poſpolicie na wyciąganiu tym lub owym ſpoſobem ściany, ale nie zawſze ſześciogranny pomiar zredukowany do

jednéy

jednéy niewiadoméy ilkości ma w drugiéy części swojéy wiadome zupełnie zredukowane. Bywa tam czasem ieden, a czasem i drugi termin ścienny, który dalszego ciągnienia sciany potrzebuje. Obaczmy więc, iak z niemi postąpić.

I. Weźmy *np:* zredukowanego iakiego pomiaru sześciogrannego część 2gą $= 20 + \sqrt{392}$, gdzie dwa są terminy, ieden doskonały to iest: 20, drugi ścienny to iest: $\sqrt{392}$, który obrócić trzeba na prostszy, czyli wyciągnąć z niego, co iest doskonałego i przed znakiem położyć, resztę, ieżli będzie iaka, zostawuiąc pod znakiem. Co się tym sposobem działa: Mnożyciele liczby ściennéy 392 między innemi są 2 i 196, (gdyż podzieliwszy 392 przez 2, wieloraz iest 196) liczba zaś ta 196 iest czworogranna, którey ściana iest $= 14$, azatém przez § XXIX: $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$. Będzie więc dana ilkość dwukrotna: $20 + \sqrt{392} = 20 + 14\sqrt{2}$, z któréy wyciągaiąc ścianę sześciogranną, daymy: że część doskonała $20 = a$, niedoskonała $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$, będzie cała ściana $= a + m\sqrt{c}$, a sześciogran z niéy uczyniony przez § XXXII. p. II. będzie: $a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3am^2c + m^3c\sqrt{c}$, którego część doskonała iest: $a^3 + 3am^2c$, niedoskonała zaś $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c}$. Że zaś $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, obróciwszy na liczbę, będzie: $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{2} + m^3 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$, czyli część

ta

ta niedoſkonała literami wyrażona równa ſobie ſamey liczbami wyrażoney. Daymy iuż: że $m = 1$, i przez $\sqrt{2}$ podzielmy: $3a^2m\sqrt{2} + m^3 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$, będzie: $3a^2 + 2 = 14$, czyli: $3a^2 = 14 - 2 = 12$, czyli: $a^2 = \frac{12}{3} = 4$, czyli nakoniec, wyciągnąwſzy ścianę czworogranną: $a = 2$, a tę cenę założywſzy w części pomiaru doſkonałey za a, będzie: $a^3 + 3am^2c = 8 + 12 = 20$. Co ſię dobrze zgadza z przedſięwziętym przykładem, którego część doſkonała $= 20$, a że cała iego ściana wyżey naleziona $= a + m\sqrt{c}$, a zaś $= 2$, $m = 1$, $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, więc ściana $= 2 + 1\sqrt{2}$, czyli: $2 + \sqrt{2}$. II. Niech będą w zredukowanym pomierze dwa terminy ścienne: $\sqrt{243} + \sqrt{242}$, które redukując przez § XXIX, będzie 1wſzy: $9\sqrt{3}$, gdyż z mnożycielów liczby 243 ieden być może 3 niedoſkonały i dla tego pod znakiem ściennym położony, drugi 81 doſkonały, który ieſt czworogranem, dlatego ściana iego 9 położona przed znakiem, drugi zaś będzie: $11\sqrt{2}$, gdyż z mnożycielów liczby 242 ieden 2 niedoſkonały, drugi 121 czworogranny, którego ściana 11. Dla ułatwienia dalſzey redukcyi założywſzy litery za liczby, będzie: $9\sqrt{3} = m\sqrt{c}$, $11\sqrt{2} = n\sqrt{d}$, azatém cała ściana $= m\sqrt{c} + n\sqrt{d}$, a ſześciogran iey przez § poprzedzający będzie:

m^3c

$m^3c\sqrt{c} + 3m^2nc\sqrt{d} + 3mn^2d\sqrt{c}$ $+ n^3d\sqrt{d}$.

A że $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$, będzie więc część iedna ſześciogranu tego $m^3c\sqrt{c} + 3mn^2d\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 6mn^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Daymy już, że $m = 1$ i podzielmy tę część przez $\sqrt{3}$ będzie: $3 + 6n^2 = 9$, czyli: $6n^2 = 9 - 3 = 6$, czyli: $n^2 = \frac{6}{6} = 1$, czyli naoſtatek wyciągnąwſzy ścianę: $n = 1$, a tę cenę załóżmy za n w 2giéy części, będzie: $3m^2nc\sqrt{d} + n^3d\sqrt{d} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$. Co ſię dobrze zgadza z założeniem, azatém ściana wyciągniona: $m\sqrt{c} + n\sqrt{d} = 1\sqrt{3} + 1\sqrt{2}$, czyli $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ *i t. d.*

ROZDZIAŁ VIII.

O Pomiarach Czwartostopniowych.

§. XXXV. *Jak ſię redukują Pomiary dwuczworogranne czyli czwartoſtopniowe?*

Naſtępujące zachowując Przepiſy:

Przepis 1. Uważać dobrze potrzeba naypierwéy: czy pomiar z warunków zagadnienia wypadły ieſt prawdziwie czwartoſtopniowy, czy nie raczéy czworogranny naciągany. Poznać to można iednym z tych ſpoſobów: 1*wſzy* ieſt w § XVIII. opiſany, 2*gi*: probując: czy ſię z niego nie da wyciągnąć ściana czworogranna, a ta byłaby pomiarem także czworogrannym,

grannym, czego wzór będzie w Rezolucyi Zagadn: 1 i 2. niżéy, 3ci: rezolwuiąc pomiar czwartostopniowy na dwa Czworogranne, czego wizerunek iasny da się w Rezolucyi zagadnienia 3ciego.

Przepis 2. Jeżeli zaś żadnym z wytkniętych w Przep: 1. sposobów pomiar czwartostopniowy nie da się obrócić na czworogranny, trzeba zacząć redukcyą iego od zgubienia frakcyy, ieżeli są iakie, i od wyrugowania z niego terminu 2go; w czém oboygu trudności nie masz, zachowuiąc to, co się w § XXIII. i XXIV. przepisało. Potém obracać pomiar czwartostopniowy na sześciogranny, co dłuższéy roboty wyciąga, do któréy trzeba mieć formułę ogólną przygotowaną, która się tak sporządza: wziąwszy pomiar ogólny wszelkie Czwartostopniowe bez 2go terminu wyrażaiący: $x^4 * + px^2 + qx + r = 0$, obracam na sześciogranny ogólny, za któregoby pomocą inne szczególne czwartostopniowe mogły się redukować, rozbieraiąc go na dwa czworogranne, które składaiącemi odtąd nazywać będę, to iest: na $x^2 + yx + f = 0$, i na $x^2 - yx + g = 0$; toż mnożę ieden przez 2gi, wypadnie inny pomiar wziętemu równy:

$$\begin{aligned} x^4 * &+ fx^2 - fyx + fg \\ &+ gx^2 + gyx \qquad = 0. \\ &- y^2x^2 \end{aligned}$$

Gdzie termin 2gi dla przeciwnych znaków zgubiony. Porównywaiąc iuż współczynniki termi-

terminów tego pomiaru z wſpółczynnikami wziętego na formułę, będzie I. $f + g - y^2 = p$, II. $gy - fy = q$, III. $fg = r$, a z 1wſzych dwóch pomiarów robiąc inny, w którymby iedna tylko niewiadoma była to ieſt ta, która w obydwóch ſkładaiących ieſt wſpółczynnikiem terminu 2go, iaka tu ieſt ilkość y; *naprzód*: w 1wſzym przeniósłſzy $-y^2$ do 2giey części, mnożę przez y wſzyſtkie terminy, będzie: $fy + gy = py + y^3$, w 2gim zaś mam: $gy - fy = q$, więc gdy te obydwa dodam, będzie ſumma: $2gy = py + y^3 + q$. gdy ie odciągnę, będzie reſzta: $2fy = py + y^3 - q$. *Powtóre*: z tey ſummy biorę cenę ilkości g, a z reſzty cenę f, będzie 1wſza: $g = \frac{py + y^3 + q}{2y}$, 2ga: $f = \frac{py + y^3 - q}{2y}$, czyli mnożąc te pomiary ieden przez 2gi; będzie: $fg = \frac{py + y^3 - q}{2y} \times \frac{py + y^3 + q}{2y} = \frac{p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2}{4y^2}$; gubiąc zaś frakcyą czyli mnożąc 1wſzą część pomiaru przez $4y^2$, będzie: $4fgy^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$. *Potrzecie*: z porównania wſpółczynników wyżey uczynionego oprócz tych dwóch wypadł był i 3ci pomiar: $fg = r$, którego 2gą część rozmnożywſzy przez $4y^2$, będzie: $fg = 4ry^2$, a tę cenę założywſzy za fg w oſtatnim pomierze, będą wſzyſtkie trzy owe pomiary w ten

ieden zbite: $4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$; czyli ułożywszy terminy porządnie przez §. XVI. będzie $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - q^2 = 0$ pomiar na pozór sześciostopniowy, w samey rzeczy sześciogranny naciągany, gdyż wszystkie wykładniki ilkości niewiadomych podzielne są przez 2, iako się namieniło w §. XVIII. Ten tedy pomiar użyty być może za formułę ogólną do redukowania czwartostopniowych szczególnych na sześciogranne podług Przep: następujacego.

Przepis 3. Mając dany szczególny iaki pomiar czwartostopniowy łatwo się obróci na sześciogranny naciągany za pomocą formuły dopiero zrobioney, zrównawszy tamtego współczynniki z tey terminami p, q, r, i iedne za 2gie założywszy, a tak obrócony ieszcze łatwiey obróci się na prosty na wzór innych sześciogrannych. Co przykład objaśni. Niech będzie *np*: $y^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, będzie: $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$, które to ceny założywszy za p, q, r w rzeczoney formule; wypadnie: $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$, a ten pomiar, ponieważ iest naciągany, zredukuje się naprzód na sześciogranny przez § XVII. p. II. założywszy z za y^2 i będzie: $z^3 - 34z^2 + 313z - 400 = 0$, potém ten sam (wyrugowawszy z niego termin 2gi przez § XXII.) zredukuje się na prosty temiż sposobami, co inne sześciogranne przez § XXV lub XXVI.

Prze-

Przepis 4. Jeżeli pomiar czwartoſtopniowy ieſt czyſty, iaki ieſt ten: $x^4 = q$, albo $x^4 = -q$, wyciąga ſię naprzód ściana czworogranna z 1wſzéy iego części, będzie: $x^2 = \sqrt{q}$, albo $x^2 = \sqrt{-q}$, potém z obydwóch, będzie $x = \sqrt{\sqrt{q}}$, albo $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$. Niech będzie *np*: $x^4 = 50$, będzie: $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ przez § XXIX. a za powtórném ściany wyciągnieniem będzie: $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$ *i t. d.*

Przykłady pomiarów czwarto-stopniowych.

Zagadnienie 1*wſze* Daną liczbę tak na dwie części podzielić, żeby części tych czworograny ieden przez drugiego rozmnożywſzy, wypadła w produkcie liczba innéy danéy równa.

Rezolucya. Niech będzie liczba dana podzielna $= 2a$, przewyſzka części $= 2x$, będzie część większa $= a + x$, mnieyſza $= a - x$; inna liczba produktowi czworogranów równa $= c$, azatém pomiar z warunków Zagadnienia wypadnie: $\overline{a + x}^2 \times \overline{a - x}^2 = c$, czyli: $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = c$. Chcąc ſkrócić pomiaru tego redukcyą, niech będzie $2a = 14$, toć $a = 7$, $c = 2304$, założywſzy więc te liczby za litery, będzie pomiar: $x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$, który oczywiście ieſt czworogrannym naciąganym i łatwo ſię zredukuje przez Przepis 1. Będzie bowiem naprzód, przenióſſzy

wiado-

wiadome do wiadomych i odciągnąwszy: $x^4 - 98x^2 = -97$. Dodawszy zaś czworogran z połowy współczynnika 2go terminu zrobiony do obydwóch części, będzie: $x^4 - 98x^2 + 2401 = 2401 - 97 = 2304$. Wyciągnąwszy ścianę czworogranną z obydwóch części przez § VI. i XI. będzie: $x^2 - 49 = \pm\sqrt{2304} = \pm 48$, czyli $x^2 = 49 - 48 = \sqrt{1}$; zkąd powtórnie wyciągnąwszy też ścianę, będzie: $x = 1$. Więc $a + x = 7 + 1 = 8$, $a - x = 6$ części zapytane, których czworogranny 64 i 36 przez siebie rozmnożone $= 2304$. C. B. D. R.

Zagadnienie 2gie. Znaleść cztéry liczby w ciągłéy Arytmetycznéy proporcyi, któreby przez siebie rozmnożone uczyniły 100.

Rezolucya. Niech będzie przewyszka terminów proporcyonalnych Arytmetycznie $= d$, termin 1wszy $= x$, więc 2gi $= x + d$, 3ci $= x + 2d$, 4ty $= x + 3d$, które rozmnożone przez siebie dadzą pomiar czwartostopniowy:

$$x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x = 100.$$

Albo: $x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x - 100 = 0$.

Pomiar ten, zgubiwszy w nim termin 2gi to iest: przez § XXII. cenę $x = z - \frac{3}{2}d$ wyniesioną do jednychże z x stopniów założywszy w nim za toż x, zamieni się w czworogranny naciągany: $z^4 * - \frac{5}{2}z^2 * + \frac{9}{16}d^4 - 100 = 0$, który się łatwo zredukuje przez Przepis 1. Jeżeli bowiem położemy $d = 1$, będzie: $z^4 -$

$\frac{5}{2}$

$\frac{5}{2} z^2 = 99 + \frac{7}{16}$; a tego dopełniemy dodaniem czworogranu $z - \frac{5}{4}$ zrobionego przez Przepis 5. § XVIII. będzie: $z^4 - \frac{5}{2} z^2 + \frac{25}{16} = 99 + \frac{7}{16} + \frac{25}{16}$, czyli $z^4 - \frac{5}{2} z^2 + \frac{25}{16} = 101$. Wyciągnąwſzy zaś ścianę czworogranną przez § VI, będzie: $z^2 - \frac{5}{4} = \sqrt{101}$, czyli: $z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{101}$, a wyciągnąwſzy i ztąd też ścianę, będzie: $z = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$. Lecz że za x założone $z - \frac{3}{2} d$, czyli że było $x = z - \frac{3}{2} d$, więc piérwſzy termin ſzukany będzie: $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1$ czyli $-\frac{3}{2}$, drugi: $x + d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 1$ czyli: $-\frac{1}{2}$, 3ci: $x + 2d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 2$ czyli $+\frac{1}{2}$, 4ty nakoniec $x + 3d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 3$ czyli $+\frac{3}{2}$; azatém produkt 1-wſzego rozmnożonego przez 4ty przez § XXXI. będzie: $1 + \sqrt{101}$, produkt zaś 2giego rozmnożonego przez 3ci będzie: $\mp 1 \mp \sqrt{101}$, a te dwa produkta przez ſiebie znowu rozmnożone to ieſt: $-1 + \sqrt{101} \times +1 + \sqrt{101} = 100$. Albowiem $\sqrt{101} = 10\sqrt{1}$, drugie także $\sqrt{101} = 10\sqrt{1}$ przez § XXIX, mnożąc zaś $10\sqrt{1}$ przez $10\sqrt{1}$, będzie produkt $= 100\sqrt{1}$, mnożąc także doſkonałą ilkość -1 przez doſkonałą $+1$, będzie podług przepiſów mnożenia -1, a to redukując do ściennego mianownika, będzie

dzie — $\sqrt{1}$, azatém ogólny produkt rozmnożonych przez siebie czworogranów będzie $= 100\sqrt{1} - \sqrt{1} = 100$. C. B. D. R.

Zagadnienie 3cie. Wynaleść trzy liczby, którychby czworograny były harmonicznie proporcyonalne, to iest: żeby czworogran naywiększy tak się miał do naymnieyszego, iako przewyszka między naywiększym i srzednim do przewyszki między śrzednim i naymnieyszym.

Rezolucya. Niech będzie z liczb zapytanych 1wsza $= 1$, 2ga $= x$, toć 3cia $= x + 1$, a czworograny 1wszéy: 1, 2giéy: xx, 3ciéy $x^2 + 2x + 1$, a z Warunków Zagadnienia pomiar:

$$x^2 + 2x + 1 . 1 :: 2x + 1 . xx - 1.$$

Czyli przez Zadan: V. Rozdz: III. Części I. produkt kraynych terminów będzie równy produktowi śrzednich: $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 2x + 1$, czyli: $x^4 + 2x^3 - 4x - 2 = 0$, do którego redukcyi użyć potrzeba sposobu od *Dyofanta* wynalezionego, ponieważ inne się nie udaią; to iest: potrzeba pomiar ten obrócić na takie dwa czworograny, którychby przewyszka dodana do większego uczyniła także czworogran. Takiemi czworogranami w tym przykładzie są 1wszy: $x^2 + 2x + 1$, 2gi: xx, których przewyszka $2x + 1$ dodana do $x^2 + 2x + 1$ daje summę: $x^2 + 4x + 2$. Ze zaś potrzeba: aby ta summa była także czworogragranem, więc trzeba wziąć ścianę iaką np: $x - 2$ i czworogran iéy: $x^2 - 4x + 4$ zró-

M wnać

wnać z rzeczoną ſummą, będzie: $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 2$, czyli: $x^2 + 4x + 2 - x^2 + 4x - 4 = 0$, czyli $8x - 2 = 0$, czyli nakoniec: $8x = 2 = x = \frac{1}{4}$. Więc rzeczona przewyſzka dodana do więkſzego czworogranu ieſt także czworogranem $\frac{1}{4}$, którą założywſzy za x w obydwóch wzmiankowanych czworogranach, w 1wſzym: $x^2 + 2x + 1$ i w 2gim: xx, będzie 1wſzy: $\frac{1}{16} + \frac{2}{4} + 1$, 2gi: $\frac{1}{16}$, czyli 1wſzy: $\frac{25}{16}$, 2gi: $\frac{1}{16}$, albo w liczbach całkowitych 1wſzy: 25, 2gi: 1; których przewyſzka 24 do więkſzego dodana to ieſt: do 25 uczyni ſummę 49, która także czworogranem ieſt ściany 7. Będą tedy liczby harmonicznie proporcyonalne: 1, xx, $x^2 + 2x + 1 = 1$, xx, 25xx; azatém 25xx. 1 : : 24xx. xx — 1. Zrównawſzy zaś produkt kraynych terminów z produktem śrzednich, będzie: $25x^4 - 25x^2 = 24x^2$, czyli wykładników przez 2 podzieliwſzy: $25x^2 - 25x = 24x$, czyli: $25x^2 = 24x + 25x = 49x$, czyli: $x^2 = \frac{49}{25}$, więc $25x^2 = \frac{25 \times 49}{25} = \frac{1225}{25}$, azatém liczby zapytane ſą 1, $\frac{49}{25}$ i $\frac{1225}{25}$, albo całkowite: 1, 49, 1225. C. B. D. R.

Przeſtroga 1. Gdyby za ścianę x—2, z którey czworogran $\frac{1}{4}$ wypadł, wzięta była inna *np:* x — 3, albo x — 4, wynaydowałyby ſię coraz inne liczby harmonicznie proporcyonalne, byle tylko dwóch czworogranów przewyſzka dodana do więkſzego uczyniła także czworogran; inaczéy Zagadnienie podobne nie mógłoby być rezolwowane. *Prze-*

Przestroga 2. Możnaby przez Przepisy 2gi i 3ci ostatniego § rozliczne Zagadnienia Geometryczne rezolwować równie iako i niektóre między Przykładami Czworogrannych i Sześciogrannych Zagadnień wyżéy położone, gdyby podniesione były do 4tego stopnia ; lecz że piérwsze figur, drugie zaś długiego działania wyciągają, coby oboje i dzieła samego i kosztu nań znacznie powiększyło, dlatego się wzmiankowane Zagadnienia własnéy Czytelników zabawce zostawują.

Przestroga 3. Tegowieczni Pisarze Algebry nie przestają na 4tym stopniu w swoich o niéy pracowitych dziełach; idą iedni nad 2gich wyżéy mało baczni nato : iż działania wyższostopniowe po nieskończenie długich i uprzykrzonych pracach równie szczupły iak pozny przynoszą pożytek i częstokroć kończą się na samych ogólnościah na pozór wiele, lecz w rzeczy samey bardzo mało co znaczących. Kto za niemi chce iść, niech ich samych bierze sobie za przewodników ; jam tu kres pracy moiéy założył, przestając na zdaniu JMć Pana *Saverien*, który pomiary 5tego i 6stego, atém bardziéy wyższych ieszcze stopniów za zbyt wysokie i ledwie nie przewyższające siły Algebrystów poczyta, a to, co się dotąd urobiło, porównywa do sztrabów wypuszczonych w niedokończonym murze, które czynią nadzieję : iż dalsza robota może się w czasie pociągnąć, i do dawnych wynalazków co no-

nowego ſię jeſzcze przydać. *Les équations du cinquieme & du ſixiéme dégré paſſent les efforts des Algebriſtes & ce qu'on a fait jusques aujourdhui n'eſt qu'une pierre d'attente pour quelque decouverte, qu'on peut eſperer ſans s'en flatter.* Dictionaire Univerſel de Mathématique.

KONIEC CZĘSCI DRUGIEY, i całego Dzieła.

REGESTR

Rzeczy w Części Drugiéy zawartych.

ROZDZIAŁ I.

O Rachunku Wykładniczym.

ROZDZIAŁ. II.

O Wyciąganiu ścian, a naprzód o ſkładzie i rozbiorze wyżſzych ſtopniów Algebraicznych.

§. IX.

ROZDZIAŁ III.

O Wyciąganiu ścian z liczb poſpolitych.

ROZDZIAŁ IV.

O Pomiarach ſkładanych w ogólności.

ROZDZIAŁ V.

O Pomiarach czworogrannych.

Przy-

ROZDZIAŁ VI.

O Pomiarach Sześciogrannych i ich redukcyi.

ROZDZIAŁ VII.

O Rachunku Sciennym czyli Radykalnym.

§. *XXX.*

ROZDZIAŁ VIII.

O Pomiarach Czwartoſtopniowych.